Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

El teorema de Darboux para formas simplécticas

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Charles Edgar LÓPEZ VEREAU

ASESOR

Yolanda Silvia SANTIAGO AYALA

Lima, Perú

2018

Referencia bibliográfica

López, C. (2018). *El teorema de Darboux para formas simplécticas*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las ...11:00... horas del Jueves 6 de diciembre de 2018, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Mg. Santiago César Rojas Romero (PRESIDENTE), Mg. Josué Alonso Aguirre Enciso (MIEMBRO), Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: «EL TEOREMA DE DARBOUX PARA FORMAS SIMPLÉCTICAS», presentado por el señor Bachiller CHARLES EDGAR LÓPEZ VEREAU, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

........Diecinueve..............(19). Sobresaliente con mención

A continuación, el Presidente del Jurado, Mg. Santiago César Rojas Romero, manifestó que el señor Bachiller CHARLES EDGAR LÓPEZ VEREAU, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las ..11:50... horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

MG. SANTIAGO CÉSAR ROJAS ROMERO
PRESIDENTE

MG. JOSUÉ ALONSO AGUIRRE ENCISO
MIEMBRO

DRA. YOLANDA SILVIA SANTIAGO AYALA
MIEMBRO ASESOR

El TEOREMA DE DARBOUX PARA FORMAS SIMPLÉCTICAS

Charles Edgar López Vereau

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala

Mg. Santiago César Rojas Romero

Mg. Josue Alonso Aguirre Enciso

Lima - Perú

Diciembre - 2018

FICHA CATALOGRÁFICA

López Vereau, Charles Edgar

El Teorema de Darboux para Formas Simplécticas, (Lima) 2018.
IX, 60 p.:il.; 29,7 cm. (UNMSM, Licenciado en Matemática, 2018).
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas
1.Matemáticas 2.Simpléctica I. UNMSM-Facultad de Ciencias Matemáticas. II. Título.

Dedico este trabajo a mis
padres Nora Vereau y Edgar López

Agradecimientos

Con la conclución de este trabajo, dejo mis agradecimientos:
A Dios y a mi familia, especialmente a mi madre, Nora Judith Vereau Churi, a mi padre, Edgar López Salvatierra y a mi hermana, Patricia Evelyn López Vereau.
A la Dra. Yolanda Santiago Ayala por asesorarme.
Al jurado, Mg. Santiago Rojas Romero, Dra. Yolanda Santiago Ayala y Mg. Josue Aguirre Enciso, por aceptar la invitación para evaluar este trabajo.
A los Doctores Umberto L. Hryniewicz y Pedro A. S. Salomão, los autores del libro Introdução à Geometria Finsler, el cual fue el mayor libro de referencia de este trabajo.
A la Universidad Nacional Mayor de San Marcos y a la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UNMSM por todo el apoyo que me ha proporcionado.
A mi amigo Leonardo Alejandro Aguilar, y a todos que contribuyeron directa o indirectamente de alguna forma en la conclusión de este trabajo.

RESUMEN

El TEOREMA DE DARBOUX PARA FORMAS SIMPLÉCTICAS

CHARLES EDGAR LÓPEZ VEREAU

DICIEMBRE - 2018

Asesor: Yolanda Santiago Ayala

Título obtenido: Licenciado en Matemática

En este trabajo estudiaremos un importante resultado de la Geometría Simpléctica como es el Teorema de Darboux para formas simplécticas, el cual muestra la rigidez de estas estructuras en vecindades de subvariedades.
Con este objetivo, primero haremos una revisión del cálculo en variedades: campos de vectores y tensores más generales, como formas diferenciales, derivada de Lie y multiplicación interior, también haremos un estudio detallado de la geometría simpléctica: espacios simplécticos, variedades simplécticas y estudiaremos rápidamente geometría de contacto, para luego estudiar el Teorema de Daboux mediante el truco de Moser.

PALABRAS CLAVES: Geometría Simplética, Geometría de Contacto, Teorema de Darboux, Truque de Moser.

ABSTRACT

THE DARBOUX THEOREM FOR SIMPLECTIC FORMS

CHARLES EDGAR LÓPEZ VEREAU

DECEMBER - 2018

Adviser: Yolanda Santiago Ayala

Obtained title: Graduate in Mathematics

In this work, we will study an important result of the Simplectic Geometry as is the Darboux's Theorem for simplectic forms, which shows the rigidity of these structures in neighborhoods of submanifold. With this objective, we will first make a revision of the calculus in manifolds: vector fields and more general tensors, as differential forms, Lie derivative and interior multiplication, we will also did a detailed study of the simplectic geometry: symplectic spaces, symplectic manifolds, and we will study contact geometry quickly, to then study Daboux's Theorem by means of Moser's trick.

KEYWORDS: Symplectic Geometry, Contact Geometry, Darboux's Theorem, Moser Trick.

Índice general

Introducción

En este trabajo estudiaremos un importante resultado de la Geometría Simpléctica como es el Teorema de Darboux para Formas Simplécticas, el cual fue probado por primera vez, por Gaston Darboux en el año 1882. Nosotros veremos la prueba de este Teorema de una forma ligeramente diferente, usando el truco de Moser.
Espero que este trabajo, además de mostrar la importancia del Teorema de Darboux para Formas Simplécticas en la Geometría, pueda dar un herramienta más para los estudiantes que están comenzando el estudio de la geometría simplética y de contacto. Para poder entender el Teorema de Darboux, tuvimos que hacer un breve revisión a los conceptos básicos de cálculo en variedades, campos de vectores y tensores más generales, como formas diferenciales, derivada de Lie y multiplicación interior, integración en variedades, también hicimos un estudio detallado de la geometría simplética: espacios simpléticos, base simplética, variedades simpléticas, estudiamos rápidamente algunos conceptos de geometría de contacto, y formas de contacto, para luego poder entender el Teorema de Darboux. Veremos como el truco de Moser tiene un papel fundamental en la demostración de este teorema, este truco fue presentado por el Doctor Jürgen Kurt Moser, por primera vez en uno de sus artículos llamado "On the volume elements on a manifold", en el año 1965. Desde ese momento, el truco, o método, fue de gran relevancia en geometría simpléctica. El Doctor Jürgen hizo muchas grandes contribuciones a la matemática y recibió el premio Wold de matemática, en el año 1995, y el premio Abel, en el año 2003.
Para una lectura más amena, recomendamos comenzar por el capítulo 2, y volver a los preliminares, cuando quiera recordar una definición o resultado.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo principal de este capítulo es recordar algunos hecho que luego nos servirán en los capítulos subsecuentes, en la primera sección del capítulo siguiente puede ser estudiado sin problema por un lectores con conocimientos en álgebra lineal, pero para el resto del libro es necesario saber sobre variedades diferenciales. En estos preliminares se verá muy rápido estos hecho, para quien desees estudiar más en detalle variedades diferenciales aconsejamos leer el libro [26]. Para una primera lectura recomendamos comenzar por el Capítulo 2 y volver a los preliminares cuando fuese necesario.

1.1. Permutaciones

Definición 1.1 *Sea k un entero positivo. Una permutación del conjunto $A = \{1, \ldots, k\}$ es una biyección $\sigma : A \to A$. La permutación cíclica $(a_1\, a_2 \cdots a_r)$, donde los a_i son distintos y $r \leq n$, es la permutación σ tal que $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = a_3$, $\ldots$, $\sigma(a_{r-1}) = a_r$, $\sigma(a_r) = a_1$, y σ fija todos los otros elementos de A. Una transposición es un 2-ciclo, o sea, un ciclo de la forma $(a\, b)$ que aplica a en b y b en a, y fija todos los otros elementos de A.*

Teorema 1.2 *Toda permutación se escribe como un producto de transposiciones. Que el número de transposiciones sea par o impar depende solamente de la permutación.*

Definición 1.3 *Denotamos por S_k el grupo de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, k\}$. Una permutación es par o impar, dependiendo si es el producto de un número par o impar de transposiciones.*

Definición 1.4 *La señal de una permutación σ, denotado por $sgn(\sigma)$ o $sgn\sigma$, es definido como*

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1 & , \quad \sigma \text{ es par} \\ -1 & , \quad \sigma \text{ es impar.} \end{cases}$$

Definición 1.5 *Un k-tensor en un espacio vectorial V es una función k-multilineal*

$$f : V \times \ldots \times V \to \mathbb{R}.$$

Definición 1.6 *Un k-tensor es un k-tensor alternado si*

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = (sgn\sigma) f(v_1, \ldots, v_k), \ \ \forall \sigma \in S_k.$$

Un k-tensor alternado en V es también llamado k-covector en V. Denotaremos por $A_k(V)$ el conjunto de todas las funciones k-lineales alternadas en el espacio vectorial V para k entero positivo.

Definición 1.7 *Sea $f \in A_k(V)$ y $g \in A_l(V)$. Definimos el producto exterior de f con g como:*

$$(f \wedge g)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (sgn\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Proposición 1.8 *Sean $f \in A_k(V)$ y $g \in A_l(V)$, entonces $f \wedge g = (-1)^{kl} g \wedge f$.*

Proposición 1.9 *Sea V un espacio vectorial real y f, g, h funciones multilineales alternadas en V de grado k, l, m respectivamente. Entonces*

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h).$$

Proposición 1.10 *Si $\alpha^1, \cdots, \alpha^k$ son funciones lineales en el espacio vectorial V y $v_1, \ldots, v_k \in V$, entonces*

$$(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k)(v_1, \ldots, v_k) = \det[\alpha^i(v_j)].$$

1.2. Variedades

De aquí en adelante, consideraremos apenas variedades de dimension finita.

Definición 1.11 *La función $r_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por*

$$r_i(a) = a_i,$$

donde $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, es llamada la i-ésima función coordenada (canónica) en $\mathbb{R}^d$. Si $f : X \to \mathbb{R}^d$, entonces denotamos

$$f_i = r_i \circ f,$$

donde f_i es llamada la i-ésima función componente de f.

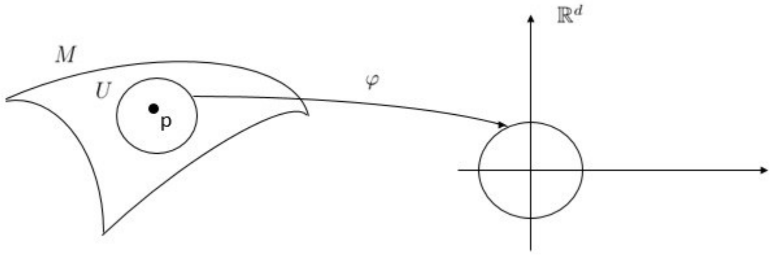


Figura 1.1: Espacio localmente euclidiano M

Definición 1.12 *Un espacio localmente Euclidiano M de dimension d, es un espacio topológico Hausdorff M, para el cual cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un subconjunto abierto del espacio Euclidiano $\mathbb{R}^d$. Si φ es un homeomorfismo de un conjunto conexo abierto $U \subset M$ para un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$, φ es llamado un mapa de coordenadas. Las funciones $x_i = r_i \circ \varphi$ son llamadas las funciones coordenadas. El par (U, φ) (aveces denotado por $(U, x_1, ..., x_d)$) es llamado sistema de coordenadas.*

Definición 1.13 *Una estructura diferenciable $\mathcal{F}$ de clase $C^k (1 \leq k \leq \infty)$ en un espacio localmente Euclidiano M es una colección de sistemas de coordenadas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ satisfaciendo:*

(a) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M.$

(b) $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ *é* C^k *para todo* $\alpha, \beta \in A$.

(c) $\mathcal{F}$ *es maximal en relación a (b).*

Definición 1.14 *Si un espacio X tiene una base numerable para su topologia, entonces decimos que X satisface el segundo axioma de contabilidad, o que es segundo contable.*

Definición 1.15 *Una variedad diferencial de clase C^k es un par $(M, \mathcal{F})$, donde M es un espacio localmente Euclidiano d-dimensional segundo contable junto con una estructura diferenciable $\mathcal{F}$ de clase C^k.*

Notación 1.16 *Referiremos a variedades diferenciable de clase C^∞ como variedades diferenciables o simplemente variedades, también usamos la terminología suave para indicar diferencial de clase C^∞.*

Definición 1.17 *Sea $U \subset M$ abierto. Decimos que $f : U \to \mathbb{R}$ es función C^∞ en U $(f \in C^\infty)$ si $f \circ \varphi^{-1}$ é C^∞ para cada sistema de coordenadas (U, φ) en M.*

Definición 1.18 *Una aplicación continua $\Psi : M \to N$ se dice diferenciable (de clase C^∞) o suave si $g \circ \Psi$ es función C^∞ en $\Psi^{-1}(U)$ (donde U dominio de g) para toda función $g : U \subset N \to \mathbb{R}$ de clase C^∞.*

Observación 1.19 *La aplicación continua $\Psi : M \to N$ es C^∞ si, y solamente si, $\varphi \circ \Psi \circ \tau^{-1}$ es C^∞ para cada aplicación coordenada τ en M y φ en N.*

Observación 1.20 *A aplicación $\Psi : M \to N$ es C^∞ si, y solamente si, para cada $m \in M$, existe V_m vecindad abierta tal que $\Psi|_{V_m}$ es C^∞.*

Definición 1.21 *Una aplicación continua $F : N \to M$ es un difeomorfismo si es C^∞, biyectiva con inversa F^{-1} también C^∞.*

Definición 1.22 *Sean M una variedad diferenciable y $m \in M$. Funciones f y g definidas en conjuntos abiertos conteniendo m son dichos tener el mismo germen en m si concuerdan en alguna vecindad de m. Eso introduce una relación de equivalencia en las funciones C^∞ en vecindades de m. Las clases de equivalencia son llamadas de germenes e denotamos el conjunto de germenes em m por $\tilde{F}_m$.*

Definición 1.23 *Un vector tangente v en el punto $m \in M$ es una derivación lineal del álgebra $\tilde{F}_m$. Esto es, para todo $f, g \in \tilde{F}_m$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,*

a) $v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda v(g)$.

b) $v(fg) = f(m)v(g) + g(m)v(f)$.

Definición 1.24 *Sea M una variedad diferencial, denotamos por T_pM el conjunto de vectores tangente a M en p y el llamamos de espacios tangentes a M en p.*

Definición 1.25 *Sean M una variedad y $p \in M$. El espacio cotangente de M en p, denotado por T_p^*M, es definido siendo el espacio dual del espacio tangente T_pM:*

$$T_p^*M = (T_pM)^* = Hom(T_pM, \mathbb{R}).$$

Definición 1.26 *Sea M una variedad C^∞ con estructura diferencial $\mathcal{F}$. Definimos:*

Fibrado tangente como $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM = \{(p, u) | p \in M, u \in T_pM\}$.

Fibrado cotangente como $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M = \{(p, \alpha) | p \in M, \alpha \in T_p^*M\}$, *donde* T_p^*M *es el dual de* T_pM .

Definimos sus proyecciones naturales, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} \pi \ &: TM \to M, \qquad \pi(v) = p \ si \ v \in T_pM, \\ \widetilde{\pi} &: T^*M \to M, \qquad \widetilde{\pi}(\tau) = p \ si \ \tau \in T_p^*M. \end{aligned}$$

Observación 1.27 *Si M es variedad diferenciable de dimension n tendremos que el fibrado tangente TM y el fibrado cotangente T^*M serán variedades diferenciables de dimension $2n$.*

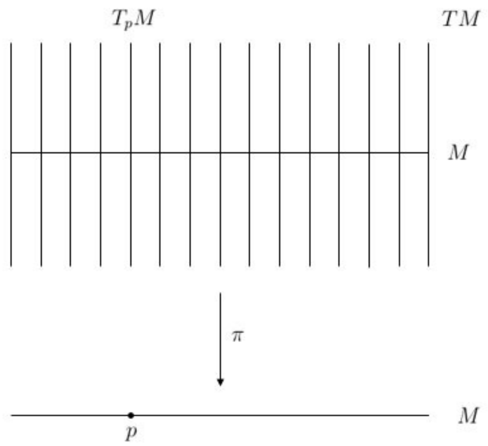


Figura 1.2: Fibrado tangente

Definición 1.28 *Sean M, N variedades diferenciables y $\psi : M \to N$ una aplicación C^∞.*

(a) *ψ es una inmersión si $d\psi_m$ es inyectiva para cada $m \in M$.*

(b) *El par (M, ψ) es una subvariedad de N si ψ es una inmersión inyectiva.*

(c) *ψ es un imbedding si ψ es una inmersión inyectiva que es también un homeomorfismo de M y $\psi(M)$.*

Definición 1.29 *Sean M una variedad de dimension d y c un entero, $1 \leq c \leq d$. Una distribución c-dimensional $\mathcal{D}$ en la variedad M es una lección de un subespacio c-dimensional $\mathcal{D}(p)$ de T_pM para cada p en M.*

Definición 1.30 *Un campo vectorial o campo de vectores X en una variedad M es una función que atribuye un vector tangente $X_p \in T_pM$ a cada ponto $p \in M$. En relación al fibrado tangente, un campo vectorial en M es simplesmente una sección del fibrado tangente $\pi : TM \to M$ y el campo vectorial es suave si fuera suave como una aplicación de M a TM. Denotamos el conjunto de todos los campos de vectores en M por $\mathfrak{X}(M)$.*

Definición 1.31 *Un flujo local en un punto p en un conjunto abierto U de una variedad M es una función C^∞*

$$F : \,]-\varepsilon, \varepsilon[\times W \to U,$$

donde ε es un número real positivo y W es una vecindad de p en U, tal que escribimos $F_t(q) = F(t, q)$, y tenemos

(i) *$F_0(q) = q$ para todo $q \in W$,*

(ii) *$F_t(F_s(q)) = F_{t+s}(q)$ siempre que ambos lados son definidos.*

Si un flujo local F es definido en $\mathbb{R} \times M$, este es llamado un flujo global.

Definición 1.32 *Un campo vectorial con un flujo global* [1] *es llamado un campo vectorial completo. Si F es un flujo global, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$F_t \circ F_{-t} = F_{-t} \circ F_t = F_0 = id_M.$$

Luego $F_t : M \to M$ es un difeomorfismo. Así, un flujo global en M es un grupo de difeomorfismos a un parámetro de M.

Definición 1.33 *Sea $F : N \to M$ una aplicación C^∞ entre variedades diferenciables. En cada punto $p \in N$, la aplicación F induce una aplicación lineal de espacios tangentes, llamada el diferencial en p,*

$$F_* : T_pN \to T_{F(p)}M$$

como a seguir: si $X_p \in T_pN$, entonces $F_*(X_p)$ es el vector tangente en $T_{F(p)}M$ definido por

$$(F_*(X_p))f = X_p(f \circ F) \in \mathbb{R} \text{ para } f \text{ germen en } F(p). \tag{1.1}$$

Como (1.1) es independiente del representante del germen, en la práctica podemos ignorar la distinción entre un germen y una función representativa para el germen.

1.3. Formas diferenciales

Definición 1.34 *El espacio vectorial $A_k(T_pM)$, usualmente denotado por $\bigwedge^k(T_p^*M)$, es el espacio de todos los k-tensores alternados en el espacio tangente T_pM.*

Definición 1.35 *Un elemento del espacio cotangente T_p^*M es llamado un covector en p. Así, un covector ω_p (o $\omega|_p$) en p es un funcional lineal*

$$\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}.$$

Definición 1.36 *Un campo covector, una 1-forma diferenciable, o mas simplemente una 1-forma en una variedad M, es una aplicación ω que atribuye a cada ponto $p \in M$ un covector ω_p en p, esto es,*

$$\begin{aligned} \omega : M &\to T^*M \\ p &\mapsto \omega_p. \end{aligned}$$

Definición 1.37 *Un campo k-covector en M es una aplicación ω que atribuye a cada punto $p \in M$ un k-covector $\omega_p \in \bigwedge^k(T_p^*M)$. Un campo k-covector es llamado una k-forma diferencial, una forma diferencial de grado k, o simplemente una k-forma.*
Denotemos por $\Omega^k(M)$ el espacio vectorial de k-formas C^∞ en la variedad M.

[1] vea [24] capítulo 3.

Definición 1.38 *El espacio vectorial $\Omega^*(M)$ de formas diferenciables C^∞ en la variedad M de dimension n es la suma directa:*

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M).$$

Definición 1.39 *Una derivada exterior* [2] *en una variedad diferenciable M es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal*

$$d : \Omega^*(M) \to \Omega^{*+1}(M)$$

tal que

(i) $d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^{deg\omega} \omega \wedge d\tau$,

(ii) $d \circ d = 0$,

(iii) *si f es una función C^∞ y X un campo vectorial suave en M, entonces $(df)(X) = Xf$.*

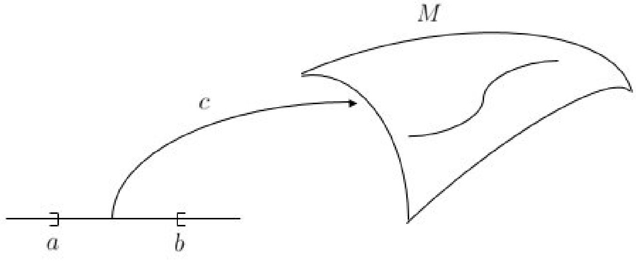
Definición 1.40 *Una k-forma ω en U es cerrada si $d\omega = 0$.*

Definición 1.41 *Una k-forma ω en U es exacta si existe una $(k-1)$-forma τ tal que $\omega = d\tau$ en U.*

Observación 1.42 *Como $d^2 = 0$, tenemos que toda forma exacta es cerrada.*

Definición 1.43 *Sea M una variedad diferencial de dimension d. Decimos que la forma diferencial $\mu \in \Omega^d(M)$ es una forma de volumen si $\mu_p \neq 0$, $\forall p \in M$.*

Definición 1.44 *Una curva suave en una variedad M es por definición una aplicación suave $c :]a, b[\to M$. Usualmente asumimos $0 \in]a, b[$ y decimos que c es una curva comenzando en p si $c(0) = p$.*



[2] Para a existencia y unicidad de la derivada exterior d, ver [25] capítulo 7, proposiciones 10, 11.

Definición 1.45 *El vector velocidad $c'(t_0)$ de la curva c en el tiempo $t_0 \in]a,b[$ es definido como*

$$c'(t_0) := c_* \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \right) \in T_{c(t_0)}M.$$

También decimos que $c'(t_o)$ es la velocidad de c en el punto $c(t_0)$. Las notaciones alternativas para $c'(t_0)$ son

$$\frac{dc}{dt}(t_0) \qquad y \qquad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} c.$$

Definición 1.46 *Sean M, N variedades diferenciables, $\varphi : M \to N$ una aplicación diferenciable y α una k-forma en el contradomínio N. El pullback de α por φ, denotado por $\varphi^*\alpha$, es una k-forma en el dominio M de φ definida por*

$$(\varphi^*\alpha)(p)((v_1)_p, \cdots, (v_k)_p) = \alpha(\varphi(p))(\varphi_*(v_1)_p, \ldots, \varphi_*(v_k)_p),$$

donde $(v_1)_p, \ldots, (v_k)_p \in T_pM$. El pullback de una 0-forma (función) g por φ será la composición

$$\varphi^* g = g \circ \varphi.$$

Proposición 1.47 *Sea $\varphi : M \to N$ una función diferenciable.*

(i) *Para una k-forma α y una l-forma β en N,*

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi^*\alpha) \wedge (\varphi^*\beta).$$

(ii) *Para una k-forma α en N,*

$$\varphi^*(d\alpha) = d(\varphi^*\alpha).$$

Proposición 1.48 *Considere la n-forma diferencible en $\mathbb{R}^n$ definido por $\Omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, donde $(x_1, \ldots, x_n)$ son coordenadas para $\mathbb{R}^n$. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable en $\mathbb{R}^n$. Entonces*

$$f^*\Omega = (\det(f_*)) \cdot \Omega.$$

1.4. Derivada de Lie y multiplicación interior

Definición 1.49 *Para X un campo vectorial suave y ω una k-forma suave en la variedad M, fijado un ponto $p \in M$ y considerando $\varphi_t : U \to M$ un flujo de X en la vecindad U de p, definimos la derivada de Lie $\mathcal{L}_X\omega$ en $p \in M$ como*

$$(\mathcal{L}_X\omega)_p = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t^*(\omega_{\varphi_t(p)}) - \omega_p}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_t^*\omega)_p - \omega_p}{t} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi_t^*\omega)_p.$$

Definición 1.50 *Si β es un k-covector en un espacio vectorial V y $v \in V$, para $k \geq 2$ la multiplicación interior o contracción de β con v es el $(k-1)$-covector $i_v\beta$ definido por*

$$(i_v\beta)(v_2, \ldots, v_k) = \beta(v, v_2, \ldots, v_k), \quad v_2, \ldots, v_k \in V.$$

Definimos $i_v\beta = \beta(v) \in \mathbb{R}$ para un 1-covector β en V y $i_v\beta = 0$ para un 0-covector β (una constante), en V.

Teorema 1.51 *Sea X un campo vectorial suave en la variedad diferenciable M.*

i) *La derivada de Lie $\mathcal{L}_X : \Omega^*(M) \to \Omega^{*-1}(M)$ es una derivación: es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal y si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\tau \in \Omega^l(M)$, entonces*

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \tau) = (\mathcal{L}_X\omega) \wedge \tau + \omega \wedge (\mathcal{L}_X\tau).$$

ii) *La derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ conmuta con la derivada exterior d.*

iii) *(Fórmula de homotopia de Cartan) $\mathcal{L}_X = di_X + i_X d$.*

Definición 1.52 *Una isotopia es una familia a 1-parámetro de difeomorfismos de una variedad M, $\varphi_t : M \to M$, tal que $\varphi_0 = Id$.*

Toda isotopia define un campo de vectores tiempo-dependiente X_t a través da ecuación

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = X_t \circ \varphi_t. \tag{1.2}$$

Recíprocamente, si el campo vectorial X fuera completo, entonces (1.2) define una isotopia φ_t, $t \in \mathbb{R}$.
Ahora podemos definir la derivada de Lie de una forma diferencial $\beta \in \Omega^k(M)$ con respecto a X_t como

$$\mathcal{L}_{X_t}\beta := \lim_{h\to 0} \frac{(\varphi_{t+h} \circ \varphi_t^{-1})^*\beta - \beta}{h}. \tag{1.3}$$

Entonces,

$$\varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\beta) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_{t+h}^*\beta - \varphi_t^*\beta}{h} = \frac{d}{dt}(\varphi_t^*\beta). \tag{1.4}$$

Lema 1.53 *Sean ω_t, $t \in [0,1]$, una familia suave de k-formas diferenciables en una variedad M y $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ una isotopia de M. Definimos un campo vectorial tiempo-dependiente X_t en M por $X_t \circ \varphi_t = \frac{d}{dt}\varphi_t$, (de modo que φ_t es el flujo de X_t). Entonces,*

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega_t) = \varphi_t^*\left(\frac{d}{dt}\omega_t + \mathcal{L}_{X_t}\omega_t\right).$$

Demostración.-
Para una k-forma tiempo-independiente ω tenemos

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega). \qquad \text{(de (1.4))}$$

Veamos para una k-forma tiempo-dependiente ω_t

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega_t) &= \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_{t+h}^*\omega_{t+h} - \varphi_t^*\omega_t}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_{t+h}^*\omega_{t+h} - \varphi_{t+h}^*\omega_t + \varphi_{t+h}^*\omega_t - \varphi_t^*\omega_t}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\varphi_{t+h}^*\left(\frac{\omega_{t+h}-\omega_t}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_{t+h}^*\omega_t - \varphi_t^*\omega_t}{h} \\
&= \varphi_t^*\left(\frac{d}{dt}\omega_t\right) + \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_{t+h}^*\omega_t - \varphi_t^*\omega_t}{h}. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Afirmación:

$$\varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_{t+h}^*\omega_t - \varphi_t^*\omega_t}{h}. \qquad (1.6)$$

De hecho, denotemos $\phi_h := \varphi_{t+h}\circ\varphi_t^{-1}$, donde t fijo y h variable temporal, notamos que ϕ_h es el flujo de $Y_h = X_{t+h}$, pues

$$\begin{aligned}
(Y_h\circ\phi_h)(p) &= (Y_h\circ(\varphi_{t+h}\circ\varphi_t^{-1}))(p) \\
&= (X_{t+h}\circ(\varphi_{t+h}\circ\varphi_t^{-1}))(p) \\
&= (X_{t+h}\circ\varphi_{t+h})(\varphi_t^{-1}(p)) \\
&= (X_s\circ\varphi_s)(\varphi_t^{-1}(p))|_{s=t+h} \\
&= \left.\frac{d}{ds}\varphi_s(\varphi_t^{-1}(p))\right|_{s=t+h} \\
&= \frac{d}{dh}\varphi_{t+h}(\varphi_t^{-1}(p)) \quad (t \text{ es fijo}) \\
&= \frac{d}{dh}(\varphi_{t+h}\circ\varphi_t^{-1})(p) \quad (t \text{ es fijo}) \\
&= \frac{d}{dh}\phi_h(p).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{d}{dh}\phi_h = Y_h\circ\phi_h$, y $\phi_0(p) = (\varphi_t\circ\varphi_t^{-1})(p) = p$, o sea, $\phi_0 = id$, luego ϕ_h es isotopia de Y_h.
Como t é fijo, y h es variable temporal, tenemos que ω_t no depende de h, podemos entonces usar (1.3), por lo tanto,

$$\mathcal{L}_{Y_h}\omega_t = \lim_{a\to 0}\frac{(\phi_{h+a}\circ\phi_h^{-1})^*\omega_t - \omega_t}{a}$$

tomando $h = 0$ vamos a tener que $Y_0 = X_{t+0} = X_t$ y

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_t}\omega_t &= \lim_{a\to 0} \frac{(\phi_a \circ \phi_0^{-1})^*\omega_t - \omega_t}{a} \\
&= \lim_{a\to 0} \frac{\phi_a^*\omega_t - \omega_t}{a} \qquad (\text{pues } \phi_0 = id) \\
&= \lim_{a\to 0} \frac{(\varphi_{t+a} \circ \varphi_t^{-1})^*\omega_t - \omega_t}{a}.
\end{aligned}$$

Aplicando φ_t^* en ambos lados,

$$\begin{aligned}
\varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t) &= \lim_{a\to 0} \frac{\varphi_t^*(\varphi_{t+a} \circ \varphi_t^{-1})^*\omega_t - \varphi_t^*\omega_t}{a} \\
&= \lim_{a\to 0} \frac{(\varphi_t^* \circ (\varphi_t^{-1})^* \circ \varphi_{t+a}^*)\omega_t - \varphi_t^*\omega_t}{a} \\
&= \lim_{a\to 0} \frac{\varphi_{t+a}^*\omega_t - \varphi_t^*\omega_t}{a}.
\end{aligned}$$

Por último, usando (1.6) en (1.5)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega_t) &= \varphi_t^*\left(\frac{d}{dt}\omega_t\right) + \varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t) \\
&= \varphi_t^*\left(\frac{d}{dt}\omega_t + \mathcal{L}_{X_t}\omega_t\right).
\end{aligned}$$

□

1.5. Integración en variedades

Teorema 1.54 *(Teorema de Stokes) Para toda $(n-1)$-forma ω con suporte compacto en la variedad orientada n-dimensional M con borde,*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Definición 1.55 *Sea M una variedad diferenciable, el espacio cociente del espacio vectorial real de p-formas cerradas módulo el subespacio de las p-formas exactas es llamado el p-ésimo grupo comohológico de Rham de M, i.e.*

$$H^p(M,\mathbb{R}) = \frac{\{p\text{-formas cerradas}\}}{\{p\text{-formas exactas}\}}.$$

Definición 1.56 *Sea α un p-forma cerrada. Representamos la clase comohológica de Rham por $[\alpha]$.*

Observación 1.57 *Dos formas cerradas ω y ω' determinan la misma clase comohológica si, y solamente si, ellas difieren en una forma exacta:*

$$\omega' = \omega + d\tau.$$

Teorema 1.58 *Sean Q una subvariedad de una variedad M y $\eta \in \Omega^k(M)$ una k-forma cerrada tal que $\eta|_{T_xQ} = 0$ para todo $x \in Q$. Entonces existe una vecindad U de Q en M y una $k-1$-forma β en U tal que $\eta = d\beta$ y $\beta|_{T_xM} = 0$ para todo $x \in Q$.*

Capítulo 2

Geometría Simpléctica

Este capítulo servirá como base para entender el Capítulo 3, donde presentaremos el truco de Moser y el teorema de Darboux.

2.1. Hechos históricos

El área de Geometría Simpléctica tiene su origen en la Física, principalmente en la mecánica clásica. Recordemos que la **Mecánica Clásica** se refiere a las tres principales formulaciones de la mecánica pre-relativista: la mecánica newtoniana, mecánica lagrangeana y la mecánica hamiltoniana. Además, la mecánica clásica es la parte de la física que analiza el movimiento, las variaciones de energía y las fuerzas que actúan sobre un cuerpo.
Como hemos mencionado la **Mecánica Hamiltoniana** es una reformulación de la mecánica clásica que fue elaborada en 1833 por el matemático irlandes William Rowan Hamilton. La mecánica hamiltoniana se originó de la mecánica lagraniana, pero ella también puede ser formulada sin recurrir a la mecánica lagrangiana, usando espacios simplécticos. Así, la **Geometría Simpléctica** es una rama de la Geometría Diferencial con raíces históricas en la formulación geométrica de la mecánica hamiltoniana. Sus desenvolvimientos recientes, son fruto de su íntima relación con áreas diversas de la Matemática como topología, dinámica, geometría compleja y Física Matemática. Para ver en detalle el origen de la geometría simpléctica ver [2].
Ahora estudiaremos en detalle algunos hecho importantes de Geometría Simpléctica.

2.2. Espacio Simpléctico

En esta sección estudiaremos con detalle los Espacios Simplécticos, mostrando las propiedades más importantes y, así, podremos definir las Variedades Simplécticas. De aquí en adelantes consideraremos apenas espacios vectoriales de dimensión finita. Para estudiar esta sección, necesitamos apenas de álgebra lineal.

Definición 2.1 *Un espacio vectorial simpléctico* (V, ω) *es un espacio vectorial real* V *previsto de una forma bilineal* $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$*, que es*

(i) *antisimétrica:* $\omega(u,v) = -\omega(v,u)$, $\forall u, v \in V$,

(ii) *no degenerada:* $\omega(u,v) = 0$, $\forall v \in V$, *entonces* $u = 0$.

La forma ω es llamada una forma bilineal simpléctica en V o, simplemente, forma simpléctica.

En una primera lectura, se puede confundir algunos de los siguientes resultados con los de un espacio vectorial con producto interno, pero note que una forma simpléctica es antisimétrica.

Observación 2.2 *Siempre tenemos,*

$$\begin{aligned} \omega(u,u) &= -\omega(u,u)\ ,\ \ \forall u \in V \\ 2\omega(u,u) &= 0\ ,\ \ \forall u \in V \\ \omega(u,u) &= 0\ ,\ \ \forall u \in V. \end{aligned}$$

Una pregunta que puede surgir es: todo espacio vectorial puede ser un espacio vectorial simpléctico? La respuesta a esta pregunta será vista en la Proposición 2.22.

Definición 2.3 *Sea (V_1, ω_1) y (V_2, ω_2) espacios vectoriales simplécticos. Decimos que una transformación lineal $T : V_1 \to V_2$ es simpléctica si $T^*\omega_2 = \omega_1$, es decir $\omega_2(Tu, Tv) = \omega_1(u,v)$ para cualquier $u, v \in V_1$. Si V_1 y V_2 tienen una misma dimensión, entonces decimos que T es una simplectomorfismo, y que (V_1, ω_1) y (V_2, ω_2) son simplectomorfos.*

Observación 2.4 *Un simplectomorfismo T es invertible.*

Ejemplo 2.5 *El espacio vectorial (V, ω_0), donde $V = \mathbb{R}^2$ y $\omega_0 : V \times V \to \mathbb{R}$ definida como $\omega_0((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = u_1v_2 - u_2v_1$ es un espacio vectorial simpléctico. En efecto, pues $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial real. Por otro lado ω_0 es lineal y antissimétrica, solo resta ver que ella es no degenerada, suponga*

$$\begin{aligned} \omega_0((u_1,u_2),(v_1,v_2)) &= 0,\ \ \forall (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 \\ u_1v_2 - u_2v_1 &= 0,\ \ \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

tomando $v_2 = u_1$ y $v_1 = -u_2$

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 &= 0 \\ u_1 = u_2 &= 0 \\ (u_1,u_2) &= 0, \end{aligned}$$

entonces ω_0 es no degenerada, luego $(\mathbb{R}^2, \omega_0)$ es espacio vectorial simpléctico.

Ejemplo 2.6 *Podemos extender el ejemplo anterior tomando $V = \mathbb{R}^{2n}$ y*

$$\omega_0 = \sum_{k=1}^{n} dq_k \wedge dp_k, \tag{2.1}$$

donde $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ son coordenadas, $dq_k(z) = z_k$ y $dp_k(z) = z_{n+k}$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \forall z = (z_1, \ldots, z_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$.
Para verificar que ω_0 es una forma simpléctica basta mostrar que ella es no degenerada, pues ser antissimétrica es una consecuencia directa de la definición de producto exterior de formas.
Tomando $e_1, \cdots, e_{2n}$ la base canónica de $\mathbb{R}^{2n}$, sea $u = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i e_i \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que $\omega_0(u, v) = 0 \ , \ \forall v \in \mathbb{R}^{2n}$. Entonces, en particular, tenemos que $\omega_0(u, e_i) = 0 \ , \ \forall i = 1, \cdots, 2n$. Pero,

$$\begin{aligned}
\omega_0(u, e_i) &= \sum_{k=1}^{n} dq_k \wedge dp_k(u, e_i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \det \begin{pmatrix} dq_k(u) & dq_k(e_i) \\ dp_k(u) & dp_k(e_i) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \delta_{(k+n)i} - \alpha_{k+n}\delta_{ki}) \\
&= \begin{cases} \alpha_{i-n}, & si\ i = n+1, \ldots, 2n \\ -\alpha_{i+n}, & si\ i = 1, \ldots, n \end{cases} \quad ,
\end{aligned}$$

En cualquier caso, resulta que $\alpha_i = 0$, para $i = 1, \cdots, 2n$. Es decir, $u = 0$ y, por lo tanto, ω_0 es no degenerada.
La forma simpléctica ω_0 también puede ser escrita como $\omega_0(\cdot, \cdot) = \langle J_0 \cdot, \cdot \rangle$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno Euclidiano canónico de $\mathbb{R}^{2n}$ y $J_0 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ es la matriz dada en bloques $n \times n$ por

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix},$$

esta forma es llamada forma simpléctica canónica.

Ejemplo 2.7 *Sean V un espacio vectorial real de dimensión n, y V^* su espacio dual. Entonces $E = V \oplus V^*$ con la forma bilineal $\omega : E \times E \to \mathbb{R}$ definida como $\omega((v, \alpha), (v', \alpha')) = \alpha'(v) - \alpha(v')$ es un espacio vectorial simpléctico.*
De hecho, pues E es un espacio vectorial real, ω es bilineal y antisimétrica, solo resta probar que ella es no degenerada, suponga

$$\begin{aligned}
\omega((v, \alpha), (u, \beta)) &= 0 \ , \ \forall (u, \beta) \in E \\
\beta(v) - \alpha(u) &= 0 \ , \ \forall (u, \beta) \in E,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

tomando $\beta = \alpha$

$$\begin{aligned} \alpha(v) - \alpha(u) &= 0 \ , \ \forall u \in V \\ \alpha(v-u) &= 0 \ , \ \forall u \in V, \end{aligned}$$

entonces $\alpha = 0$*, luego en (2.2) tenemos*

$$\beta(v) = 0 \ , \ \forall \beta \in V^*,$$

entonces $v = 0$*. Por lo tanto,* $(v, \alpha) = (0, 0)$ *lo que implica que* ω *es no degenerada.*

Definición 2.8 *Sea* V *un espacio vectorial complejo y* $h : V \times V \to \mathbb{C}$ *es un producto interno Hermitiano, si cumple las siguientes propiedades* $\forall u, v, w \in V$ *y* $\forall \alpha \in \mathbb{C}$

i) $h(u + v, w) = h(u, v) + h(v, w)$,

ii) $h(u, v + w) = h(u, v) + h(u, w)$,

iii) $h(\alpha u, v) = \alpha h(u, v)$,

iv) $h(u, \alpha v) = \overline{\alpha} h(u, v)$,

v) $h(u, v) = \overline{h(v, u)}$,

vi) $h(u, u) > 0$, $\forall u \neq 0$.

Ejemplo 2.9 *Sean* V *un espacio vectorial complejo y* $h : V \times V \to \mathbb{C}$ *un producto interior Hermitiano, la 2-forma* $\Omega = Imh$ *es una forma simpléctica, donde* Imh *es la imagen de* h*.*

Ejemplo 2.10 *Sean* (V_1, ω_1)*,* (V_2, ω_2) *espacios vectoriales simplécticos, entonces* $V_1 \times V_2$ *es un espacio vectorial simpléctico con la forma producto*

$$\omega((u_1, u_2), (v_1, v_2)) := \omega_1(u_1, v_1) + \omega_2(u_2, v_2).$$

Definición 2.11 *Los simplectomorfismos lineales de* V *forman un grupo de Lie denotado por* $Sp(V, \omega)$ *y es llamado de grupo lineal simpléctico. En el caso en que* $V = \mathbb{R}^{2n}$ *y* $\omega = \omega_0$ *como en (2.1), se usa la notación* $Sp(2n)$ *en vez de* $Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$*.*

A seguir dedicaremos un tiempo definiendo y presentando algunas propriedades de ortogonal simpléctico, y de los subespacios Isotrópico, Coisotrópico y Lagrangiano, pues estos son muy usados na Geometría Simpléctica. Veremos que el subespacio de un espacio vectorial simpléctico no es, necesariamente, un espacio vectorial simpléctico.

Definición 2.12 *Sea* (V, ω) *un espacio vectorial simpléctico y* $L \subset V$ *un subespacio vectorial. El ortogonal simpléctico de* L *es el conjunto*

$$L^{\perp} = \{u \in V \ | \ \omega(u, v) = 0, \ \forall v \in L\}.$$

Es claro que $L^{\perp}$ *es subespacio vectorial. El subespacio vectorial* L *es dicho un subespacio*

a) Isotrópico *si* $L \subset L^{\perp}$.

b) Coisotrópico *si* $L^{\perp} \subset L$.

c) Lagrangiano *si es isotrópico y coisotrópico, i.e.,* $L = L^{\perp}$.

d) Simpléctico *si* ω *es no degenerada en* L*, i.e.,* (L, ω) *es espacio vectorial simpléctico.*

Ejemplo 2.13 *Sean* $(\mathbb{R}^2, \omega_0)$ *espacio vectorial simpléctico y* $L = \{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ *subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^2$*, vamos a ver que* L *es subespacio Lagrangiano. Sabemos que*

$$L^{\perp} = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \omega_0(u, v) = 0 \ \forall v \in L\},$$

sea $u = (u_1, u_2) \in L^{\perp}$*, entonces*

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_0((u_1, u_2), v), \ \forall v \in L \\ &= \omega_0((u_1, u_2), (\lambda, 0)), \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ &= -u_2 \lambda, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

entonces $u_2 = 0$*, luego*

$$L^{\perp} = \{(u_1, 0), \ \forall u_1 \in \mathbb{R}\},$$

así $L = L^{\perp}$*, por lo tanto* L *es subespacio Lagrangiano.*

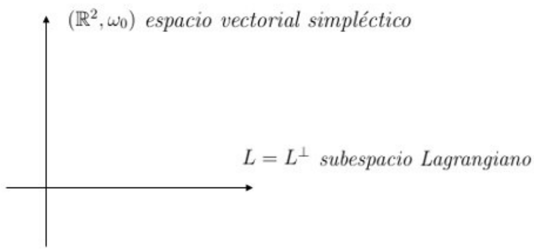


Figura 2.1: Subespacio Lagrangiano L

Proposición 2.14 *En la notación de la Definición 2.12 vale que*

$$\dim L + \dim L^{\perp} = \dim V.$$

Demostración.-
Consideremos el espacio dual V^* de V y el anulador

$$L^0 = \{\theta \in V^* / L \subset \ker \theta\}.$$

La aplicación

$$\begin{array}{rcl} T : V & \to & V^* \\ v & \longmapsto & T(v) = \omega(v, \cdot) \end{array}$$

es lineal.
Además, tiene núcleo trivial, pues se

$$\begin{array}{rcll} u \in \ker T \quad y \quad \omega & \neq & 0 & \\ T(u) & = & 0 & \\ \omega(u, \cdot) & = & 0 & \quad (\omega \text{ no degenerada}) \\ u & = & 0, & \end{array}$$

luego $\ker(T) = \{0\}$.
Por lo tanto, T es inyectiva y $\dim(\ker(T)) = 0$, para ver que T es sobreyectiva, es suficiente notar que

$$\dim(V^*) = \dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(Im(T)),$$

concluimos que T es isomorfismo.
Por otro lado

$$L^\perp = T^{-1}(L^0) \text{ , onde } T^{-1}(L^0) = \{v \in V / T(v) \in L^0\}.$$

De hecho,

$$\begin{array}{rcl} v \in L^\perp & \Longleftrightarrow & \omega(v, u) = 0 \ \forall u \in L \\ & \Longleftrightarrow & T(v)(u) = 0 \ \forall u \in L \\ & \Longleftrightarrow & L \subset \ker(T(v)) \\ & \Longleftrightarrow & T(v) \in L^0 \\ & \Longleftrightarrow & v \in T^{-1}(L^0). \end{array}$$

Por lo tanto, como $T(L^\perp) = L^0$ y T es un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \dim L^\perp = \dim(T(L^\perp)) & = & \dim L^0 \\ \dim L^\perp & = & \dim L^0. \end{array} \tag{2.3}$$

Además, tenemos

$$\dim L + \dim L^0 = \dim V. \tag{2.4}$$

De hecho, sean $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de L, luego $\{v_1^*, \ldots, v_r^*\}$ es una base de L^*.
Para $i = r+1, \ldots, n$, $v_i^*(v_j) = 0$ para $j = 1, \ldots, r$, entonces

$$L \subset \ker(v_i^*) \ , \ \ i = r+1, \ldots, n,$$

luego

$$\{v_{r+1}^*, \ldots, v_n^*\} \text{ é base de } L^0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\dim L^* + \dim L^0 &= \dim V^* \\ \dim L + \dim L^0 &= \dim V.\end{aligned}$$

Por último, de (2.3) y (2.4), tenemos

$$\dim L + \dim L^{\perp} = \dim V.$$

□

Observación 2.15 *Si L es subespacio Lagrangiano de un espacio vectorial simpléctico* (V, ω)*, de la Proposición 2.14 se tiene que* $\dim L = \frac{1}{2}\dim V$.

Definición 2.16 *Si W es un subespacio de un espacio vectorial V de dimension finita, entonces la codimension de W en V es dada por:*

$$codim(W) = \dim(V) - \dim(W).$$

Proposición 2.17 *Sean* (V, ω) *un espacio vectorial simpléctico y L un subespacio de V, sigue que:*

i) $(L^{\perp})^{\perp} = L$.

ii) *Si L tiene codimension 1, entonces L es coisotrópico.*

iii) $L \oplus L^{\perp} = V$ *si, y solamente si L es simpléctico.*

iv) *Se L es isotrópico, entonces* $2\dim L \leq \dim V$.

v) *L es simpléctico si, y solamente si* $L^{\perp}$ *es simpléctico.*

Demostración.-
i) $(L^{\perp})^{\perp} = L$.
En efecto, por la Proposición 2.14, tenemos L subespacio de V, entonces

$$\dim L + \dim L^{\perp} = \dim V,$$

como $L^{\perp}$ es también un subespacio de V, entonces

$$\dim L^{\perp} + \dim(L^{\perp})^{\perp} = \dim V,$$

luego

$$\dim L = \dim(L^{\perp})^{\perp}. \tag{2.5}$$

Por otro lado, dado $v \in L$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\omega(v,u) = 0 \ , \ \ \forall u \in L^{\perp} \\
&v \in (L^{\perp})^{\perp} \\
&L \subset (L^{\perp})^{\perp}, \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

de (2.5) y (2.6), concluimos que $(L^{\perp})^{\perp} = L$.

ii) Si L tiene codimension 1, entonces L es coisotrópico.
En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}
codim(L) &= 1 \\
\dim V - \dim L &= 1 \\
\dim V - 1 &= \dim L, \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

además, como

$$\begin{aligned}
\dim L + \dim L^{\perp} &= \dim V \\
\dim V - 1 + \dim L^{\perp} &= \dim V \qquad \text{(de (2.7))} \\
\dim L^{\perp} &= 1.
\end{aligned}$$

Sea $\{u_1\}$ la base de $L^{\perp}$, probaremos que $L^{\perp} \subset (L^{\perp})^{\perp} = L$. Sea $u \in L^{\perp}$, entonces $u = \lambda u_1$.
Afirmación: $\omega(u,w) = 0 \ , \ \ \forall w \in L^{\perp}$.
En efecto, dado $w \in L^{\perp}$, entonces $w = \alpha u_1$

$$\begin{aligned}
\omega(u,w) &= \omega(\lambda u_1, \alpha u_1) = \lambda\alpha\omega(u_1,u_1) = 0 \\
\omega(u,w) &= 0 \ , \ \ \forall w \in L^{\perp}.
\end{aligned}$$

Entonces $u \in (L^{\perp})^{\perp}$, luego $L^{\perp} \subset (L^{\perp})^{\perp} = L$. Por lo tanto, L es coisotropico.

iii) $L \oplus L^{\perp} = V \Longleftrightarrow L$ es simpléctico.
$(\Longrightarrow)$
Como $L \oplus L^{\perp}$ es suma directa, tenemos $L \cap L^{\perp} = \{0\}$.
Por otro lado, sea $u \in L$, probaremos que, si $\omega(u,v) = 0, \ \forall v \in L$, entonces $u = 0$.
Tenemos

$$\begin{aligned}
\omega(u,v) &= 0 \ , \ \ \forall v \in L \\
u &\in L^{\perp} \\
u \in L \cap L^{\perp} &= \{0\},
\end{aligned}$$

entonces $u = 0$, luego L es simpléctica.
$(\Longleftarrow)$
Probaremos que $L \cap L^{\perp}$=$\{0\}$.

($\supseteq$)Como L y $L^\perp$ son subespacios de V, entonces $0 \in L \cap L^\perp$ i.e. $\{0\} \subset L \cap L^\perp$.
($\subseteq$) Si $u \in L \cap L^\perp$, entonces

$$\begin{array}{rcl} u \in L & \text{y} & u \in L^\perp \\ u \in L & \text{y} & \omega(u,v) = 0 \ , \ \forall v \in L \\ u & = & 0 \qquad (L \text{ es simpléctico}) \\ L \cap L^\perp & \subset & \{0\}. \end{array}$$

Luego, $L \cap L^\perp = \{0\}$, y como $\dim L + \dim L^\perp = \dim V$, tenemos

$$L \oplus L^\perp = V.$$

iv) Si L es isotrópico $\Longrightarrow 2\dim L \leq \dim V$.
En efecto, como L es isotrópica $L \subset L^\perp$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \dim L & \leq & \dim L^\perp \\ \dim L + \dim L & \leq & \dim L^\perp + \dim L \\ 2\dim L & \leq & \dim V. \end{array}$$

v)L es simpléctico $\Longleftrightarrow L^\perp$ es simpléctico.
En efecto,

$$\begin{array}{rll} L \text{ es simpléctico} & \Longleftrightarrow L \oplus L^\perp = V & (\text{ de iii)}) \\ & \Longleftrightarrow L^\perp \oplus L = V & (\ V \text{ es espacio vectorial}) \\ & \Longleftrightarrow L^\perp \oplus (L^\perp)^\perp = V & (\text{ de i)}) \\ & \Longleftrightarrow L^\perp \text{ es simpléctico} & (\text{ de iii) y } L^\perp \text{ es subespacio de } V) \end{array}$$

□

Lema 2.18 *Sean E, F subespacios de V, entonces $E^\perp \cap F^\perp = (E+F)^\perp$.*

Demostración.-
($\subseteq$)
Sea $u \in E^\perp \cap F^\perp$, entonces $u \in E^\perp$ y $u \in F^\perp$, además, tenemos

$$\begin{array}{rcl} \omega(u,v) & = & \omega(u, v_1 + v_2), \quad \forall v = v_1 + v_2 \in E + F, \\ & = & \omega(u,v_1) + \omega(u,v_2) \quad \forall v = v_1 + v_2 \in E + F, \\ & = & 0 \quad \forall v \in E + F \quad (u \in E^\perp \text{ y } u \in F^\perp), \end{array}$$

entonces $u \in (E+F)^\perp$, luego $E^\perp \cap F^\perp \subseteq (E+F)^\perp$.
($\supseteq$)
Sea $u \in (E+F)^\perp$, tenemos

$$\begin{array}{rcl} \omega(u,v) & = & \omega(u, v+0), \quad 0 \in F, \forall v \in E \\ & = & 0, \quad \forall v \in E \quad (u \in (E+F)^\perp) \end{array}$$

luego $u \in E^{\perp}$, también tenemos

$$\begin{aligned} \omega(u,w) &= \omega(u,0+w), \quad 0 \in E, \forall w \in F \\ &= 0, \quad \forall w \in F \quad (u \in (E+F)^{\perp}) \end{aligned}$$

luego $u \in F^{\perp}$, por lo tanto, $u \in E^{\perp} \cap F^{\perp}$, esto es, $(E+F)^{\perp} \subseteq E^{\perp} \cap F^{\perp}$. Luego se tiene que $E^{\perp} \cap F^{\perp} = (E+F)^{\perp}$.
□

Proposición 2.19 *Sean (V_1, ω_1), (V_2, ω_2) espacio vectoriales simplécticos. Un isomorfismo lineal $\varphi : V_1 \to V_2$ es simpléctomorfismo si y solamente si el gráfico de φ es subespacio Lagrangiano en $(V_1 \times V_2, \omega_1 \oplus (-\omega_2))$.*

Proposición 2.20 *Sea Q variedad diferenciable de dimension n, y sea $S \subset Q$ subvariedad de dimension k. Entonces el fibrado conormal de S*

$$N^*S := \{(x,\xi) \in T^*Q \mid x \in S, \xi \in T_x^*Q, \text{ tal que } \xi|_{T_xS} = 0\},$$

es subvariedad lagrangiana de T^*Q.

Observación 2.21 *N^*Q es la sección nula y $N^*\{x\} = T_x^*Q$.*

La siguiente proposición nos dice que todo espacio vectorial simpléctico es de dimension par. De esta forma, responde negativamente a la pregunta: todo espacio vectorial puede ser un espacio vectorial simpléctico? Pues los espacios vectoriales de dimension impar no pueden ser espacios vectoriales simplécticos.

Proposición 2.22 *Sea (V, ω) un espacio vectorial simpléctico no trivial. Entonces existen $n \geq 1$ y una base*

$$\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$$

de V tal que

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0, \;\; \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij},$$

para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. En particular, $\dim V$ es par.
Una base con estas propiedades es llamada de una base simpléctica de (V, ω).

Demostración.-
Afirmamos que $\dim V \geq 2$, pues si $\dim V = 1$, existe $v \in V$ tal que $\{v\}$ es base de V. Tomando $e_1 \in V$ con $e_1 \neq 0$, como ω es no degenerada, existe $f_1 \in V$ tal que $\omega(e_1, f_1) \neq 0$. Como $\{v\}$ es base de V, entonces existen λ y α tales que $e_1 = \lambda v$ y $f_1 = \alpha v$, luego $\omega(e_1, f_1) = \lambda\alpha\omega(v, v) = 0$ que es una contradicción.
Paro el caso $\dim V = 2$, tomemos $\{e_1, f_1\}$ base de V, por ser ω no degenerada tenemos $\omega(e_1, e_1) = 0$ y $\omega(f_1, f_1) = 0$, además, tenemos que $\omega(e_1, f_1) \neq 0$, pues si $\omega(e_1, f_1) = 0$, al tomar $u \in V$ tenemos $u = \lambda e_1 + \alpha f_1$, entonces $\omega(e_1, u) = \omega(e_1, \lambda e_1 +$

$\alpha f_1) = \lambda\omega(e_1, e_1) + \alpha\omega(e_1, f_1) = 0$, como u es arbitrario tenemos $\omega(e_1, u) = 0\ ,\ \forall u \in V$, entonces $e_1 = 0$, que es una contradicción. Entonces $\omega(e_1, f_1) \neq 0$, podemos asumir $\omega(e_1, f_1) = 1$, pues si $\omega(e_1, f_1) = \beta$, donde β es un número real, solo tenemos que definir $e_1' = \dfrac{e_1}{\beta}$, entonces tenemos $\omega(e_1', f_1) = \omega(\dfrac{e_1}{\beta}, f_1) = \dfrac{1}{\beta}\omega(e_1, f_1) = 1$.
Para $\dim V = N > 2$, probaremos por inducción, asumamos que es valido para espacios simplécticos de dimensión $< N$, sea $e_1 \in V$ un vector no nulo.
Como ω es no degenerada y e_1 no nulo, existe $f_1 \in V$ tal que $\omega(e_1, f_1) = 1$.
Sea $V_1 \subset V$ el subespacio generado por e_1 y f_1. Claramente (V_1, ω) es simpléctico (ver Ejemplo 2.24).
Luego, como $V_1^{\perp}$ también es subespacio de V del item v), de la Proposición 2.17, tenemos que $(V_1^{\perp}, \omega)$ es simpléctico, entonces del ítem iii), de la Proposición 2.17, tenemos $V_1 \oplus V_1^{\perp} = V$.
Entonces

$$\begin{aligned} \dim V_1 + \dim V_1^{\perp} &= \dim V \\ 2 + \dim V_1^{\perp} &= N \\ \dim V_1^{\perp} &= N - 2, \end{aligned}$$

como $\dim V_1^{\perp} = N - 2 < N$, de la hipótesis de inducción, tenemos que existe $n \geq 2$, tal que

$$\dim V_1^{\perp} = N - 2 = 2n - 2,$$

y además, existe una base simpléctica

$$\{e_2, \ldots, e_n, f_2, \ldots, f_n\} \text{ de } (V_1^{\perp}, \omega).$$

Por lo tanto, como

$$\begin{aligned} \dim V_1 + \dim V_1^{\perp} &= \dim V \\ 2 + 2n - 2 &= \dim V \\ 2n &= \dim V, \end{aligned}$$

entonces $\dim V$ es par y $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ es una base simpléctica de (V, ω).
$\square$

Ejemplo 2.23 *Una base para el espacio simpléctico* $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ *es* $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$, *donde*

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0), \ \textit{con 1 en la primera coordenada} \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0), \ \textit{con 1 en la n-ésima coordenada} \\ f_1 &= (0, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0), \ \textit{con 1 en la n+1-ésima coordenada} \\ &\vdots \\ f_n &= (0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 1), \ \textit{con 1 en la 2n-ésima coordenada} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.24 *Si $e_1,\ldots e_n, f_1,\ldots,f_n$ es una base simpléctica de (V,ω) entonces*
a) *El generado por e_1, f_1 es simpléctico.*
En efecto, sea V_1 el generado por e_1, f_1 , probaremos que ω es no degenerada en V_1.
Sea $u \in V_1$ tal que $\omega(u,v)=0$, $\forall v \in V_1$.
Como $u \in V_1$, entonces existen $\lambda_1, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ tales que $u = \lambda_1 e_1 + \alpha_1 f_1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\omega(u,v) &= 0\ ,\ \forall v \in V_1\\
\omega(u,\lambda e_1+\alpha f_1) &= 0\ ,\ \forall \lambda,\alpha \in \mathbb{R}\ ,\ (pues\ v \in V_1)\\
\omega(\lambda_1 e_1+\alpha_1 f_1,\lambda e_1+\alpha f_1) &= 0\ ,\ \forall \lambda,\alpha \in \mathbb{R}\\
\lambda\alpha_1+\alpha\lambda_1 &= 0\ ,\ \forall \lambda,\alpha \in \mathbb{R}\ ,\ (definición\ de\ base\ simpléctica)\\
\lambda_1=\alpha_1 &= 0\\
u &= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, V_1 es simpléctica.

b) *El generado por e_1, e_2 es isotrópico.*
En efecto, sea V_2 el generado por e_1, e_2, probaremos que $V_2 \subset V_2^{\perp}$.
Tenemos

$$\begin{aligned}
V_2^{\perp} &= \{u \in V/\omega(u,v)=0\ ,\ \forall v \in V_2\}\\
V_2^{\perp} &= \{u \in V/\omega(u,\lambda e_1+\alpha e_2)=0\ ,\ \forall \lambda,\alpha \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Sea $u_1 \in V_2$, entonces existen $\lambda_1,\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tales que $u_1 = \lambda_1 e_1 + \alpha_1 e_2$, luego para todo $v \in V_2$

$$\begin{aligned}
\omega(u_1,v) &= \omega(\lambda_1 e_1+\alpha_1 e_2,\lambda e_1+\alpha e_2)\\
&= 0\ ,\quad (definición\ de\ base\ simpléctica)
\end{aligned}$$

por lo tanto, $u_1 \in V_2^{\perp}$, entonces $V_2 \subset V_2^{\perp}$.
Luego, V_2 es isotrópico.

c) *O generado por $e_1,\ldots,e_n, f_1, f_2$ es coisotrópico.*
En efecto, sea V_3 el generado por $e_1,\ldots,e_n, f_1, f_2$, probaremos que $V_3^{\perp} \subset V_3$

$$V_3^{\perp} = \{u \in V/\omega(u,v)=0\ ,\ \forall v \in V_3\}.$$

Sea $u \in V_3^{\perp}$, como $u \in V_3^{\perp} \subset V$, tenemos que existen $\lambda_i', \alpha_i' \in \mathbb{R}$ $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$ tales que

$$u = \lambda_1' e_1 + \ldots + \lambda_n' e_n + \alpha_1' f_1 + \ldots + \alpha_n' f_n.$$

Además, como $u \in V_3^{\perp}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\omega(u,v) &= 0\ ,\ \forall v \in V_3\\
\omega(u,\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_n e_n+\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2) &= 0\ ,\ \forall \lambda_i,\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}\\
\lambda_1'\alpha_1+\lambda_2'\alpha_2+\alpha_1'\lambda_1+\ldots+\alpha_n'\lambda_n &= 0\ ,\ \forall \lambda_i,\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}\\
(\lambda_1')^2+(\lambda_2')^2+(\alpha_1')^2+\ldots+(\alpha_n')^2 &= 0\\
\lambda_1'=\lambda_2'=\alpha_1'=\ldots=\alpha_n' &= 0,
\end{aligned}$$

luego $u = \lambda'_3 e_3 + \ldots + \lambda'_n e_n$ *e, así,* $u \in V_3$*, osea,* $V_3^{\perp} \subset V_3$*, por lo tanto,* V_3 *es coisotrópico.*

Note que la siguiente proposición es solamente otra forma de enunciar a Proposición 2.22.

Proposición 2.25 *Todo espacio vectorial simpléctico de dimension* $2n$ *es simplectomorfo a* $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$*.*

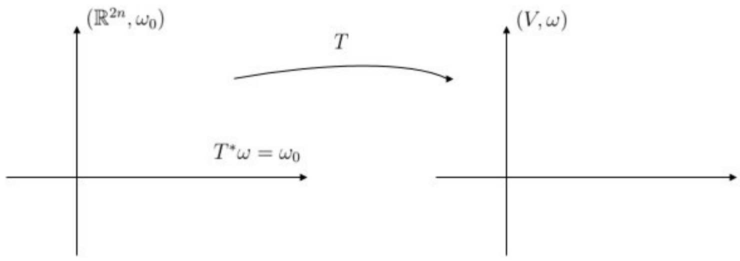


Figura 2.2: V simplectomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$

Demostración.- Sea (V, ω) el espacio vectorial simpléctico de dimension $2n$ y, entonces por la Proposición 2.22, posee base simpléctica $\{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n\}$.
Sea $T : \mathbb{R}^{2n} \to V$, dada por

$$T(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i u_i + \sum_{i=1}^{n} z_{n+i} v_i,$$

donde $z = (z_1, \cdots, z_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$.
Afirmación: T es un simplectomorfismo.
a) T es lineal. En efecto, sean $z, w \in \mathbb{R}^{2n}$, tenemos

$$\begin{aligned}
T(z+w) &= \sum_{i=1}^{n}(z_i + w_i)u_i + \sum_{i=1}^{n}(z_{n+i} + w_{n+i})v_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} z_i u_i + \sum_{i=1}^{n} z_{n+i} v_i + \sum_{i=1}^{n} w_i u_i + \sum_{i=1}^{n} w_{n+i} v_i \\
&= T(z) + T(w). \\
T(\lambda z) &= \sum_{i=1}^{n}(\lambda z_i)u_i + \sum_{i=1}^{n}(\lambda z_{n+i})v_i \\
&= \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} z_i u_i + \sum_{i=1}^{n} z_{n+i} v_i \right) \\
&= \lambda T(z).
\end{aligned}$$

b) T es isomorfismo, pues $T(e_i) = u_i$ y $T(f_i) = v_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$, donde $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ es la base simpléctica canónica de $\mathbb{R}^{2n}$. Luego T es isomorfismo.

c) $T^*\omega = \omega_0$, pues dados $z, w \in \mathbb{R}^{2n}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\omega_0(z,w) &= \sum_{k=1}^{n} dq_k \wedge dp_k(z,w) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \det \begin{pmatrix} dq_k(z) & dq_k(w) \\ dp_k(z) & dp_k(w) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \det \begin{pmatrix} z_k & w_k \\ z_{k+n} & w_{k+n} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (z_k w_{n+k} - z_{n+k} w_k). \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\omega(Tz,Tw) &= \omega(\sum_{j=1}^{n} z_j u_j + \sum_{j=1}^{n} z_{n+j} v_j \,,\, \sum_{k=1}^{n} w_k u_k + \sum_{k=1}^{n} w_{n+k} v_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (z_j w_k \omega(u_j,u_k) + z_j w_{n+k}\omega(u_j,v_k) + z_{n+j} w_k \omega(v_j,u_k) \\
&\qquad + z_{n+j} w_{n+k}\omega(v_j,v_k)) \qquad (\omega \text{ es bilinear }) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (z_j w_{n+k}\delta_{jk} - z_{n+j} w_k \delta_{jk}) \qquad (\text{definición de base simpléctica}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (z_j w_{n+j} - z_{n+j} w_j). \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

De (2.8) y (2.9), $\omega(Tz,Tw) = \omega_0(z,w)$, $\forall z, w \in \mathbb{R}^{2n}$, por lo tanto, $T^*\omega = \omega_0$ y T es un simplectomorfismo entre $\mathbb{R}^{2n}$ y V.
□

Observación 2.26 *La Proposición 2.25 quiere decir que $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, a menos de isomorfismos, es el único ejemplo de espacio vectorial simpléctico de dimension $2n$. Esto nos dice que todo espacio vectorial de dimension par tiene forma simpléctica con el cual es un espacio vectorial simpléctico, esto ultimo no se tiene en variedades.*

Definición 2.27 *Sea V un espacio vectorial real, una estructura complexa en V es un endomorfismo lineal $J : V \to V$ tal que $J^2 = -Id$. Nos referiremos al par (V, J) como un espacio vectorial complejo.*

Definición 2.28 *Sea (V, Ω) espacio vectorial simpléctico. Una estructura compleja J en V es compatible con Ω se para $u, v \in V$,*

$$g(u,v) := \Omega(u, Jv),$$

define un producto interno.
Explicitamente, las condiciones de compatibilidad (es decir simétrica y positiva de g) son :

$$\Omega(Ju, Jv) = \Omega(u,v) \qquad y \qquad \Omega(u, Ju) > 0, u \neq 0.$$

Teorema 2.29 *Sea (V,Ω) un espacio vectorial simpléctico. Entonces cada producto interno G en V define de forma canónica una estructura compleja $J : V \to V$ que es compatible con Ω.*

Para la demostración ver [2] pagina 17. Denotaremos por $\mathcal{J}(V,\Omega)$ el conjunto de todas las estructuras complejas en V que son compatibles con Ω.

Observación 2.30 *Sea (V,ω) espacio vectorial simpléctico no trivial, de la Proposición 2.22, la matriz de ω relativa a la base simpléctica es*

$$
\begin{aligned}
J &= \begin{pmatrix}
\omega(e_1,e_1) & \cdots & \omega(e_1,e_n) & \omega(e_1,f_1) & \cdots & \omega(e_1,f_n)\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\omega(e_n,e_1) & \cdots & \omega(e_n,e_n) & \omega(e_n,f_1) & \cdots & \omega(e_n,f_n)\\
\omega(f_1,e_1) & \cdots & \omega(f_1,e_n) & \omega(f_1,f_1) & \cdots & \omega(f_1,f_n)\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\omega(f_n,e_1) & \cdots & \omega(f_n,e_n) & \omega(f_n,f_1) & \cdots & \omega(f_n,f_n)
\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1\\
-1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

y dados $u,v\in V$ podemos expresar $\omega(u,v)$ en la forma matricial como $\omega(u,v) = u^tJv$, o también podemos expresar por $\omega(u,v) = \langle J_0u, v\rangle$, donde $J_0 = J^t$, J^t denota la transpuesta de J y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto interno Euclidiano canónico de $\mathbb{R}^{2n}$.

Lema 2.31 *$T\in Sp(2n)$ si, y solamente si $T^tJ_0T = J_0$, donde T^t denota la transpuesta de T.*

Demostración.-
($\Longrightarrow$) Sea $T\in Sp(2n)$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\omega_0(u,v) &= \omega_0(Tu,Tv)\ ,\ \forall u,v\in V \qquad (T^*\omega_0=\omega_0)\\
\langle J_0u,v\rangle &= \langle J_0Tu,Tv\rangle\ ,\ \forall u,v\in V \qquad (\text{definición de } \omega_0\ )\\
&= \langle T^tJ_0Tu,v\rangle\ ,\ \forall u,v\in V\\
J_0 &= T^tJ_0T.
\end{aligned}
$$

($\Longleftarrow$) Sea $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ espacio simpléctico y $T : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ transformación lineal, tenemos

$$\begin{aligned}
\omega_0(u,v) &= \langle J_0u, v\rangle \ , \ \forall u,v \in V & \text{(definición de } \omega_0 \text{)}\\
&= \langle T^tJ_0Tu, v\rangle \ , \ \forall u,v \in V & (T^tJ_0T = J_0)\\
&= \langle J_0Tu, Tv\rangle \ , \ \forall u,v \in V &\\
&= \omega_0(Tu, Tv) \ , \ \forall u,v \in V, &
\end{aligned}$$

entonces $T \in Sp(2n)$.
$\square$
A seguir veremos otra forma de determinar cuando una forma bilineal alternada es una forma simpléctica.

Lema 2.32 *Sea V un espacio vectorial real de dimensión $2n$. Una forma bilineal alternada ω en V es una forma simpléctica si, y solamente si, $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (n factores) es forma de volumen.*

Demostración.-
($\Longrightarrow$)
Si ω fuera simpléctica, entonces por la Proposición 2.22 encontramos una base simpléctica $\{e_1, f_1,$
$\ldots, e_n, f_n\}$. De las propriedades de base simpléctica se concluye que
$\omega^n(e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n) = n!$, luego $\omega^n \neq 0$. De hecho, como $\{e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n\}$ es base simpléctica de V, tenemos que $\{e_1^*, f_1^*, \ldots, e_n^*, f_n^*\}$ es base de V^*. Con esto tenemos

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{1\le i<j\le n} \omega(e_i,e_j)e_i^* \wedge e_j^* + \sum_{1\le i<j\le n} \omega(e_i,f_j)e_i^* \wedge f_j^* + \sum_{1\le i<j\le n} \omega(e_i,f_j)f_i^* \wedge f_j^*\\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge f_i^* \qquad \text{(definición de base simpléctica)}
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\omega^n &= (\sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge f_i^*)^n\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge f_i^*\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge f_i^*\right)\\
&= \sum_{\sigma\in S(n)} e_{\sigma(1)}^* \wedge f_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(n)}^* \wedge f_{\sigma(n)}^*\\
&= n!(e_1^* \wedge f_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* \wedge f_n^*).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\omega^n(e_1, f_1, \quad \dots \quad, e_n, f_n) &= \\
&= (e_1^* \wedge f_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* \wedge f_n^*)(e_1, f_1, \dots, e_n, f_n) \\
&= \det\begin{pmatrix} e_1^* \wedge f_1^*(e_1, f_1) & \cdots & e_1^* \wedge f_1^*(e_n, f_n) \\ \vdots & & \vdots \\ e_n^* \wedge f_n^*(e_1, f_1) & \cdots & e_n^* \wedge f_n^*(e_n, f_n) \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} e_1^*(e_1) & e_1^*(f_1) \\ f_1^*(e_1) & f_1^*(f_1) \end{pmatrix} & \cdots & \det\begin{pmatrix} e_1^*(e_n) & e_1^*(f_n) \\ f_1^*(e_n) & f_1^*(f_n) \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \det\begin{pmatrix} e_n^*(e_1) & e_n^*(f_1) \\ f_n^*(e_1) & f_n^*(f_1) \end{pmatrix} & \cdots & \det\begin{pmatrix} e_n^*(e_n) & e_n^*(f_n) \\ f_n^*(e_n) & f_n^*(f_n) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{pues } e_i^*(e_j) = \delta_{ij}, f_i^*(f_j) = \delta_{ij}) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\omega^n(e_1, f_1, \dots, e_n, f_n) = n!$

$(\Longleftarrow)$

Para cada j denotemos por $S(j)$ el grupo de las permutaciones de $\{1, \cdots, j\}$.
Recapitulando la fórmula del producto exterior: si α es k-forma alternada y β es l-forma alternada, entonces

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S(k,l)} sinal(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}),$$

donde $S(k, l)$ denota el subconjunto de $S(k+l)$ de las permutaciones σ satisfaciendo $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$ y $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)$.
Como ω es una forma bilineal alternada ω en V, solo resta probar que ω es no degenerada. Para eso probaremos la siguiente afirmación.
Afirmación: Si ω es degenerada, entonces $w^n = 0$.
De hecho, suponga que existe $u_1 \in V \setminus \{0\}$ tal que

$$\omega(u_1, v) = 0, \ \ \forall v \in V. \tag{2.10}$$

Completemos u_1 a una base $B = \{u_1, \cdots, u_{2n}\}$ de V.
Probemos por inducción en j que para todo subconjunto $B' = \{w_1, \dots, w_{2j}\} \subset B$ con $2j$ elementos vale que, si $u_1 \in B' \Longrightarrow \omega^j(w_1, \dots, w_{2j}) = 0$.
Para $j = 1$, tenemos $B' = \{w_1, w_2\}$, como $u_1 \in B'$, sea $w_1 = u_1$. Entonces, de (2.10) sigue que $\omega(u_1, w_2) = 0, \ \forall v \in V$.
Ahora suponga válido para $N < j$, probaremos que es válido para j. Tenemos

$$\begin{aligned}
\omega^j(w_1, \dots, w_{2j}) &= \omega^1 \wedge \omega^{j-1}(w_1, \dots, w_{2j}) \\
&= \sum_{\sigma \in S(2,2(j-1))} sinal(\sigma)\omega(w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)})\omega^{j-1}(w_{\sigma(3)}, \dots, w_{\sigma(2j)}).
\end{aligned}$$

Si $u_1 \in \{w_1, \ldots, w_{2j}\}$, entonces como

$$\{w_1, \ldots, w_{2j}\} = \{w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}\} \cup \{w_{\sigma(3)}, \ldots, w_{\sigma(2j)}\}$$

tenemos que $u_1 \in \{w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}\}$ o $u_1 \in \{w_{\sigma(3)}, \ldots, w_{\sigma(2j)}\}$. Por la hipótesis de inducción, o $\omega(w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}) = 0$ o $\omega^{j-1}(w_{\sigma(3)}, \ldots, w_{\sigma(2j)}) = 0$, entonces $\omega^j(w_1, \ldots, w_{2j}) = 0$.
Luego, si cumple $\omega^n(u_1, \ldots, u_{2n}) = 0$.
Por lo tanto, como $\{u_1, \ldots, u_{2n}\}$ es base de V y $\omega^n(u_1, \ldots, u_{2n}) = 0$, concluimos que $\omega^n(u) = 0,\ \forall u \in V$, entonces $\omega^n = 0$. Demostramos que si ω es degenerada, entonces $\omega^n = 0$. El recíproco es $\omega^n \neq 0$, entonces ω es no degenerada. Por lo tanto, ω es simpléctica.
□

Lema 2.33 *Si* $T \in Sp(2n)$ *entonces* $\det T = 1$.

Demostración.-
Sea ω_0^n la forma de volumen en $\mathbb{R}^{2n}$ determinada por ω_0. Entonces, por la definición de determinante a través de formas, tenemos que

$$T^*\omega_0^n(v_1, \ldots, v_{2n}) = (\det T)\omega_0^n(v_1, \ldots, v_{2n}), \quad \text{(Proposición 1.48 y } T_* = T) \quad (2.11)$$

para todo $v_1, \cdots, v_2 \in \mathbb{R}^{2n}$. Pero

$$\begin{aligned} T^*\omega_0^n &= T^*(\omega_0 \wedge \cdots \wedge \omega_0) \\ &= (T^*\omega_0) \wedge \cdots \wedge (T^*\omega_0) \quad \text{(Proposición 1.47}(ii)) \\ &= \omega_0 \wedge \cdots \wedge \omega_0 \quad (T \text{ es simpléctica}) \\ &= \omega_0^n. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Luego de (2.11) y (2.12) tenemos que $\det T = 1$.
□

Definición 2.34 *Se llama espectro de* T*, y lo denotaremos por* $\sigma(T)$*, al conjunto de autovalores de* T*; i.e.*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}/\lambda \textit{ es un autovalor de } T\}.$$

Lema 2.35 *Una matriz simpléctica* $T \in Sp(2n)$ *satisface las siguientes propiedades:*

i) T *y* T^{-1} *son conjugadas y, consecuentemente, vale que* $\lambda \in \sigma(T)$ *si, y solamente si* $\lambda^{-1} \in \sigma(T)$.

ii) *Si* $\lambda, \lambda' \in \sigma(T) \cap \mathbb{R}$, $v \in \ker(T - \lambda I)$, $v' \in \ker(T - \lambda' I)$ *y* $\lambda\lambda' \neq 1$, *entonces* $\omega_0(v, v') = 0$.

Demostración.-
i) Por el Lema 2.31 tenemos

$$\begin{aligned} T^t J_0 T &= J_0 \\ T^t &= J_0 T^{-1} J_0^{-1}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

luego T^t y T^{-1} son conjugados.
Sabemos que T^t y T son siempre conjugados. Entonces existe B tal que

$$T^t = B^{-1} T B. \tag{2.14}$$

Luego, de (2.13) y (2.14), tenemos

$$\begin{aligned} B^{-1} T B &= J_0 T^{-1} J_0^{-1} \\ T &= B J_0 T^{-1} J_0^{-1} B^{-1} \\ T &= (B J_0) T^{-1} (B J_0)^{-1} \end{aligned}$$

y, así T y T^{-1} son conjugados, y poseen el mismo polinomio característico.
Por lo tanto, sabemos que los autovalores de T son las raíces de sus polinomio característico, como T y T^{-1} poseen el mismo polinomio característico, también poseen los mismos autovalores, i.e.

$$\beta \in \sigma(T) \Longleftrightarrow \beta \in \sigma(T^{-1}). \tag{2.15}$$

Por último,

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(T) &\Longleftrightarrow \lambda \text{ es autovalor de } T \\ &\Longleftrightarrow Tx = \lambda x \\ &\Longleftrightarrow x = \lambda T^{-1} x \\ &\Longleftrightarrow \lambda^{-1} x = T^{-1} x \\ &\Longleftrightarrow \lambda^{-1} \text{autovalor de } T^{-1} \\ &\Longleftrightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1}) \quad (\text{ de } (2.15)) \\ &\Longleftrightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(T). \end{aligned}$$

ii) Tenemos $\lambda, \lambda' \in \sigma(T) \cap \mathbb{R}$ autovalores, con sus respectivos autovectores $v \in \ker(T - \lambda I)$ y $v' \in \ker(T - \lambda' I)$, por lo tanto, $Tv = \lambda v$, $Tv' = \lambda' v'$. Por último,

$$\begin{aligned} \omega_0(v, v') &= \omega_0(Tv, Tv') \quad (T \in Sp(2n)) \\ &= \omega_0(\lambda v, \lambda' v') \\ &= \lambda \lambda' \omega_0(v, v') \\ (1 - \lambda\lambda') \omega_0(v, v') &= 0 \qquad\qquad (\lambda\lambda' \neq 1) \\ \omega_0(v, v') &= 0. \end{aligned}$$

□

Corolario 2.36 *Si $T \in Sp(2n)$, entonces las multiplicidades algebraicas de 1 y de -1 como (posibles) autovalores de T son pares.*

Demostración.-
Sea λ autovalor de T. Como T es invertible (pues $\det T = 1 \neq 0$) tenemos que λ^{-1} es autovalor de T^{-1} con la misma multiplicidad de λ en T. Además, del Lema 2.35 i), tenemos que si λ es autovalor de T, entonces λ^{-1} es autovalor de T, por lo tanto, el número de autovalores diferentes de ± 1 es par. Por lo tanto, las multiplicidades algebraicas de los autovalores diferentes de ± 1 es par.
Luego, si -1 fuera autovalor, entonces su multiplicidad debe ser par, pues

$$\det T = \lambda_1^{q_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{2r}^{q_{2r}},$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2r}$ so autovalores de T y $q_1, \ldots, q_{2r}$ sus multiplicidades algebraicas. Luego, si $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ tenemos

$$\begin{aligned} 1 &= (1)^{q_1}(-1)^{q_2}\lambda_3^{q_3} \cdot \ldots \cdot \lambda_{2r}^{q_{2r}} \text{ (pues } \lambda \text{ y } \lambda^{-1} \in \sigma(T)) \\ 1 &= (-1)^{q_2}, \end{aligned}$$

por lo tanto, q_2 es par. Luego las sumas de las multiplicidades algebraicas de los autovalores diferentes de 1 es un número par, digamos $2m$. Luego,

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + \ldots + q_r &= 2n = \dim(Sp(2n)) \\ q_1 + 2m &= 2n \\ q_1 &= 2(n-m) \end{aligned}$$

y así q_1 es par.
$\square$

Lema 2.37 *Si $T \in Sp(2n)$ es simétrica y positiva definida, entonces $T^s \in Sp(2n)$ para todo número real $s > 0$.*

Demostración.-
Como T es simétrica y positiva, tenemos que todos sus autovalores son positivos i.e. $\sigma(T) \subset (0, +\infty)$.
Por el Teorema Espectral existe descomposición

$$\mathbb{R}^{2n} = \oplus|_{\lambda \in \sigma(T)} M_\lambda,$$

donde M_λ es el autoespacio del autovalor λ. Denote $\sigma' = \sigma(T) \cap (0, 1]$, y para cada $\lambda \in \sigma'$ escriba

$$E_\lambda = M_\lambda + M_{\lambda^{-1}}.$$

Por Lema 2.35 vale que si $\lambda, \mu \in \sigma'$, $\lambda \neq \mu$, entonces $E_\lambda \subset E_\mu^\perp$.
De hecho, pues dado $v \in M_\lambda$, como λ, $\mu \in \sigma'$ y $\lambda \neq \mu$, tenemos que $\lambda \cdot \mu \neq 1$. Del Lema 2.35, tenemos

$$\omega_0(u, w) = 0 \quad , \quad \forall u \in M_\lambda \;\; \forall w \in M_\mu,$$

entonces

$$\omega_0(v,w)=0 \quad , \quad \forall w\in M_\mu,$$

luego $v\in M_\mu^\perp$, esto es, $M_\lambda\subset M_\mu^\perp$. También tenemos

$$\begin{aligned} \omega_0(v,u) &= \omega_0(Tv,Tu), \quad \forall u\in M_{\mu^{-1}} \\ &= \omega_0(\lambda v,\mu^{-1}u), \quad \forall u\in M_{\mu^{-1}} \\ &= \lambda\mu^{-1}\omega_0(v,u), \quad \forall u\in M_{\mu^{-1}} \\ (1-\lambda\mu^{-1})\omega_0(v,u) &= 0, \quad \forall u\in M_{\mu^{-1}}, \end{aligned}$$

entonces $v\in M_{\mu^{-1}}^\perp$, esto es, $M_\lambda\subset M_{\mu^{-1}}^\perp$, luego $M_\lambda\subset M_\mu^\perp\cap M_{\mu^{-1}}^\perp=(M_\mu+M_{\mu^{-1}})^\perp=E_\mu^\perp$ (do Lema 2.18).
Por otro lado, sea $v\in M_{\lambda^{-1}}$, tenemos

$$\begin{aligned} \omega_0(v,u) &= \omega_0(Tv,Tu) \quad \forall u\in M_{\mu^{-1}} \quad (T\in Sp(2n)) \\ &= \omega_0(\lambda^{-1}v,\mu^{-1}u) \quad \forall u\in M_{\mu^{-1}} \\ &= \lambda^{-1}\mu^{-1}\omega_0(v,u) \quad \forall u\in M_{\mu^{-1}} \\ (1-\lambda^{-1}\mu^{-1})\omega_0(v,u) &= 0 \quad \forall u\in M_{\mu^{-1}} \\ (1-(\lambda\mu)^{-1})\omega_0(v,u) &= 0 \quad \forall u\in M_{\mu^{-1}} \\ \omega_0(v,u) &= 0 \quad \forall u\in M_{\mu^{-1}} \quad (\lambda\mu\neq 1), \end{aligned}$$

entonces $v\in M_{\mu^{-1}}^\perp$, luego $M_{\lambda^{-1}}\subset M_{\mu^{-1}}^\perp$, también tenemos

$$\begin{aligned} \omega_0(v,u) &= \omega_0(Tv,Tu), \quad \forall u\in M_\mu \\ &= \omega_0(\lambda^{-1}v,\mu u), \quad \forall u\in M_\mu \\ &= \lambda^{-1}\mu\omega_0(v,u), \quad \forall u\in M_\mu \\ (1-\lambda^{-1}\mu)\omega_0(v,u) &= 0, \quad \forall u\in M_\mu \\ \omega_0(v,u) &= 0, \quad \forall u\in M_\mu \quad (\lambda\neq\mu), \end{aligned}$$

entonces $v\in M_\mu^\perp$, esto es, $M_{\lambda^{-1}}\subset M_\mu^\perp$, luego $M_{\lambda^{-1}}\subset M_{\mu^{-1}}^\perp\cap M_\mu^\perp=(M_{\mu^{-1}}+M_\mu)^\perp=E_\mu^\perp$ (do Lema 2.18).
Por lo tanto, como $M_\lambda\subset E_\mu^\perp$ y $M_{\lambda^{-1}}\subset E_\mu^\perp$, tenemos $E_\lambda=M_\lambda+M_{\lambda^{-1}}\subset E_\mu^\perp$.
Del resultado anterior podemos deducir que cada E_λ es espacio simpléctico. De hecho, vamos a probar que

$$\forall u\in E_\lambda \text{ com } u\neq 0, \exists v\in E_\lambda \text{ tal que } \omega_0(u,v)\neq 0.$$

Sea $u\in E_\lambda$, como ω es no degenerada en $\mathbb{R}^{2n}$ tenemos que existe $v\in\mathbb{R}^{2n}$ tal que $\omega_0(u,v)\neq 0$. Además, como $\mathbb{R}^{2n}=\oplus|_{\mu\in\sigma'(T)}E_\mu$, tenemos que $v=\sum\limits_{\mu\in\sigma'(T)}v_\mu$, con $v_\mu\in E_\mu$. Entonces tenemos $\omega_0(u,v)\neq 0$ y

$$\begin{aligned} \omega_0(u,v) &= \omega_0(u,\sum_{\mu\in\sigma'(T)}v_\mu) \\ &= \sum_{\mu\in\sigma'(T)}\omega_0(\mu,v_\mu) \\ &= \omega_0(u,v_\lambda) \quad (\text{pues } u\in E_\lambda \text{ y si } \lambda\neq\mu, \text{ entonces } E_\lambda\subset E_\mu^\perp) \end{aligned}$$

y así $\omega_0(u, v_\lambda) \neq 0$, o sea, existe $v_\lambda \in E_\lambda$ tal que $\omega_0(u, v_\lambda) \neq 0$, o sea, E_λ es simpléctico.
Obviamente $\mathbb{R}^{2n} = \oplus|_{\lambda \in \sigma'} E_\lambda$ y $\lambda \in \sigma' \setminus \{1\}$, entonces $E_\lambda = M_\lambda \oplus M_{\lambda^{-1}}$.
Por definición sabemos que T^s es aquella que actúa en cada M_λ por la multiplicación por λ^s y, consecuentemente, cada E_λ es T^s-invariante.
Los hechos descritos hasta aquí implican que T^s es simpléctico si, y solamente si, $T^s|_{E_\lambda}$ es simpléctico en $(E_\lambda, \omega_0|_{E_\lambda \times E_\lambda})$, para todo $\lambda \in \sigma'$.
Afirmación 1: $T^s|_{E_\lambda}$ es simpléctica
De hecho,
a) Si $\lambda = 1$, $E_1 = M_1 \oplus M_1 = M_1$, ahora sea $u, v \in M_1$, entonces $\omega_0(T^s u, T^s v) = \omega_0(u, v)$, luego $T^s|_{E_1} = T^s|_{M_1}$ es simpléctico .
b) Si $\lambda \in \sigma' \setminus \{1\}$, tenemos que M_λ es Lagrangiano, pues si $u \in M_\lambda$ tenemos

$$\begin{aligned}
\omega_0(u, v) &= \omega_0(Tu, Tv), \quad \forall u \in M_\lambda \quad (T \in Sp(2n)) \\
&= \omega_0(\lambda u, \lambda v), \quad \forall u \in M_\lambda \\
&= \lambda^2 \omega_0(u, v), \quad \forall u \in M_\lambda \\
0 &= (\lambda^2 - 1)\omega_0(u, v), \quad \forall u \in M_\lambda \quad (\lambda \in \sigma' \setminus \{1\}) \\
0 &= \omega_0(u, v), \quad \forall u \in M_\lambda,
\end{aligned}$$

entonces $u \in M_\lambda^\perp$, luego $M_\lambda \subset M_\lambda^\perp$, y como $\dim M_\lambda = \dim M_\lambda^\perp$ tenemos que $M_\lambda = M_\lambda^\perp$, o sea, M_λ es Lagrangiano, del mismo modo $M_{\lambda^{-1}}$ es Lagrangiano.
Por último tome vectores $u, v \in E_\lambda = M_\lambda \oplus M_{\lambda^{-1}}$ y escriba $u = u_0 + u_1$ y $v = v_0 + v_1$ con $u_0, v_0 \in M_\lambda$ y $u_1, v_1 \in M_{\lambda^{-1}}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\omega_0(T^s u, T^s v) &= \omega_0(T^s(u_0 + u_1), T^s(v_0 + v_1)) \\
&= \omega_0(T^s u_0 + T^s u_1, T^s v_0 + T^s v_1) \\
&= \omega_0(T^s u_0, T^s v_0) + \omega_0(T^s u_0, T^s v_1) \\
&\quad + \omega_0(T^s u_1, T^s v_0) + \omega_0(T^s u_1, T^s v_1) \\
&= \omega_0(\lambda^s u_0, \lambda^s v_0) + \omega_0(\lambda^s u_0, \lambda^{-s} v_1) + \omega_0(\lambda^{-s} u_1, \lambda^s v_0) \\
&\quad + \omega_0(\lambda^{-s} u_1, \lambda^{-s} v_1) \\
&= \omega_0(\lambda^s u_0, \lambda^{-s} v_1) + \omega_0(\lambda^{-s} u_1, \lambda^s v_0) \ \text{(de } M_\lambda = M_\lambda^\perp, M_{\lambda^{-1}} = M_{\lambda^{-1}}^\perp) \\
&= \lambda^s \lambda^{-s}(\omega_0(u_0, v_1) + \omega_0(u_1, v_0)) \\
&= \omega_0(u_0, v_1) + \omega_0(u_1, v_0) \\
&= \omega_0(u_0, v_1) + \omega_0(u_1, v_0) + \omega_0(u_0, v_0) + \omega_0(u_1, v_1) \\
&= \omega_0(u_0 + u_1, v_0 + v_1) \\
&= \omega_0(u, v),
\end{aligned}$$

por lo tanto, $T^s|_{E_\lambda}$ es simpléctico.
Afirmación 2: $T^s|_{E_\lambda}$ es simpléctico, entonces T^s es simpléctico
De hecho, sean $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$, como $\mathbb{R}^{2n} = \oplus|_{\lambda \in \sigma'} E_\lambda$ tenemos que $u = \sum_{\mu \in \sigma'(T)} u_\mu$, $u_\mu \in E_\mu$ y $v = \sum_{\lambda \in \sigma'(T)} v_\lambda$, $v_\lambda \in E_\lambda$, por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}
\omega_0(T^s u, T^s v) &= \omega_0\left(T^s \sum_{\mu\in\sigma'(T)} u_\mu, T^s \sum_{\lambda\in\sigma'(T)} v_\lambda\right)\\
&= \omega_0\left(\sum_{\mu\in\sigma'(T)} T^s u_\mu, \sum_{\lambda\in\sigma'(T)} T^s v_\lambda\right)\\
&= \sum_{\mu\in\sigma'(T),\lambda\in\sigma'(T)} \omega_0(T^s u_\mu, T^s v_\lambda) \quad (\omega_0 \text{ es bilineal })\\
&= \sum_{\mu\in\sigma'(T),\lambda\in\sigma'(T)} \omega_0(u_\mu, v_\lambda) \quad (T^s|_{E_\lambda} \text{ es simpléctica})\\
&= \omega_0(u,v),
\end{aligned}$$

luego T^s es simpléctico.
□
Toda matriz $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ puede ser escrita como $M = A + iB$, con $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
La inclusión $\mathbb{C}^{n\times n} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ dada por

$$A + iB \longmapsto \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

es $\mathbb{R}$-lineal y respeta multiplicación matricial.
Además,

$$(A + iB)^* \longmapsto \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}^t,$$

donde $(A + iB)^*$ denota la transpuesta conjugada.
De este modo podemos ver $GL(n,\mathbb{C})$ y todos sus subgrupos como subgrupos de $GL(2n,\mathbb{R})$. La matriz iI es mapeada en la matriz $\begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} = J_0$ vía esta identificación.
Luego,

$$GL(n,\mathbb{C}) \simeq \{T \in GL(2n,\mathbb{R})/TJ_0 = J_0T\}$$

Lema 2.38 *Tenemos las siguientes igualdades*

$$Sp(2n) \cap O(2n) = Sp(2n) \cap GL(n,\mathbb{C}) = O(2n) \cap GL(n,\mathbb{C}) = U(n).$$

Demostración.-
Sea T una matriz real $2n \times 2n$, ella satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned}
T \in GL(n,\mathbb{C}) &\iff TJ_0 = J_0T,\\
T \in Sp(2n) &\iff T^tJ_0T = J_0,\\
T \in O(2n) &\iff T^tT = I.
\end{aligned}$$

Notamos que, cualquier dos de estas condiciones implica la tercera, así queda demostrado las dos primeras igualdades del Lema. Para terminar, demostremos que $Sp(2n) \cap O(2n) = U(n)$, el subgrupo $Sp(2n) \cap O(2n)$ consiste de las matrices

$$T = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in GL(2n, \mathbb{R}),$$

con

$$X^tY = Y^tX, \qquad X^tX + Y^tY = I_{n\times n}.$$

Pues $T \in O(2n)$, i.e.

$$\begin{aligned}
I_{2n\times 2n} &= T^tT, \\
I_{2n\times 2n} &= \begin{pmatrix} X^t & Y^t \\ -Y^t & X^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \\
I_{2n\times 2n} &= \begin{pmatrix} X^tX + Y^tY & -X^tY + Y^tX \\ -Y^tX + X^tY & Y^tY + X^tX \end{pmatrix} \\
X^tY = Y^tX, &\qquad X^tX + Y^tY = I_{n\times n}.
\end{aligned}$$

Esto es precisamente la condición en $U = X + iY$ para ser unitario. Por lo tanto, $Sp(2n) \cap O(2n) = U(n)$.

□

Luego,

$$U(n) = \{T \in GL(2n, \mathbb{R})/TJ_0 = J_0T \text{ y } T^t = T^{-1}\}$$

Sigue que $U(n) \subset Sp(2n)$ es subgrupo.

Definición 2.39 *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$, decimos que A es retracción por deformación de X si existe una aplicación continua $F : [0,1] \times X \to X$ satisfaciendo:*

i) *$F(0, x) = x$, $\forall x \in X$.*

ii) *$F(t, x) = x$, $\forall x \in A$, $\forall t \in [0, 1]$.*

iii) *$F(1, x) \in A$, $\forall x \in X$.*

Lema 2.40 *$U(n)$ es una retracción por deformación de $Sp(2n)$.*

Demostración.-
Para todo $T \in GL(2n, \mathbb{R})$ vale que $U = (TT^t)^{-\frac{1}{2}}T \in O(2n)$.

De hecho, probaremos que $U^tU = I$

$$\begin{aligned} U^tU &= ((TT^t)^{-\frac{1}{2}}T)^t(TT^t)^{-\frac{1}{2}}T \\ &= T^t((TT^t)^{-\frac{1}{2}})^t(TT^t)^{-\frac{1}{2}}T \\ &= T^t((TT^t)^t)^{-\frac{1}{2}}(TT^t)^{-\frac{1}{2}}T \\ &= T^t(TT^t)^{-\frac{1}{2}}(TT^t)^{-\frac{1}{2}}T \\ &= T^t(TT^t)^{-1}T \\ &= T^t(T^t)^{-1}T^{-1}T \\ &= I. \end{aligned}$$

Denotando $P = (TT^t)^{\frac{1}{2}}$, entonces $T = PU$ es la descomposición polar de T. Se $T \in Sp(2n)$, entonces $T^t \in Sp(2n)$. Por el Lema 2.37 tenemos

$$\begin{aligned} TT^t &\in Sp(2n) \\ P = (TT^t)^{\frac{1}{2}} &\in Sp(2n) \\ U = (TT^t)^{-\frac{1}{2}}T &\in Sp(2n) \\ T = PU &\in Sp(2n). \end{aligned}$$

En particular $U \in O(2n) \cap Sp(2n) = U(n)$
Defina

$$\begin{aligned} r : [0,1] \times Sp(2n) &\longrightarrow Sp(2n) \\ (s,T) &\longmapsto r(s,T) = P^{1-s}U. \end{aligned} \tag{2.16}$$

El mapa r es continuo. Vamos a ver si r cumple con las propiedades $i), ii)$ y $iii)$ de la definición 2.39, tomando $s = 0$ tenemos

$$r(0,T) = PU = T \ , \ \forall T \in Sp(2n)$$

i,e $r(0,\cdot)$ es identidad en $Sp(2n)$ y así cumple $i)$, y si $T \in U(n)$

$$\begin{aligned} r(s,T) &= P^{1-s}U \\ &= (TT^t)^{\frac{1}{2}(1-s)}(TT^t)^{-\frac{1}{2}}T \\ &= (TT^t)^{-\frac{1}{2}s}T \qquad (T \in U(n)) \\ &= (I)^{-\frac{1}{2}s}T \\ &= T, \end{aligned}$$

entonces $r(s,T) = T$, $\forall T \in U(n)$ i.e. $r(s,\cdot)|_{U(n)}$ es identidad en $U(n)$ $\forall s \in [0,1]$, con esto tenemos $ii)$. Por último, tomando $s = 1$ tenemos

$$r(1,T) = P^{1-1}U = U \in U(n), \quad \forall T \in Sp(2n)$$

con esto cumple $iii)$. Luego $U(n)$ es una retracción por deformación de $Sp(2n)$.
□

Corolario 2.41 *$Sp(2n)$ es conexo.*

Demostración.-
Probaremos que cualquier elemento de $Sp(2n)$ puede ser conectado a la identidad por un camino continuo que se encuentra en $Sp(2n)$. Entonces, cualquier dos elementos A y B de $Sp(2n)$ pueden ser conectados por un camino que va de A para la identidad y después de la identidad para B.
Sea $T \in Sp(2n)$, entonces tenemos que existe una matriz cuadrada C de orden n invertible tal que

$$A = CBC^{-1},$$

donde B es una matriz triangular superior:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2n} \end{pmatrix}$$

Como $\det T = 1$ y $\det T = \det B = \lambda_1 \cdots \lambda_{2n}$, tenemos que $\lambda_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq 2n$. Sea $B(t)$ obtenido multiplicando la parte superior de la diagonal de B por $(1-t)$ para $0 \leq t \leq 1$ y sea $A(t) = CB(t)C^{-1}$, $A(0) = T$ y $A(1) = CDC^{-1}$, donde

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2n} \end{pmatrix}.$$

Además, el $\det A(t) = \lambda_1 \cdots \lambda_{2n} = \det A = 1$ para todo $0 \leq t \leq 1$. Por lo tanto, $A(t)$ es un camino que está en $Sp(2n)$.
Ahora, podemos definir $\lambda_i(t)$ que conecta cada λ_i a 1 en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en el intervalo $1 \leq t \leq 2$ para cada $1 \leq i \leq 2n-1$, notamos que $\lambda_i(1) = \lambda_i$ y $\lambda_i(2) = 1$, y definimos $\lambda_{2n}(t) = (\lambda(t) \cdots \lambda_{n-1}(t))^{-1}$ para $1 \leq t < 2$ y $\lambda_{2n}(2) = \lambda_{2n}$. Tenemos entonces

$$A(t) = C \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2n}(t) \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Este es un camino continuo que comienza en CDC^{-1} cuando $t = 1$ y termina en $CIC^{-1} = I$ cuando $t = 2$. Como $\det A(t) = \lambda_1(t) \cdot \ldots \cdot \lambda_{2n-1}(t)\lambda_{2n}(t) = \lambda_1(t) \cdot \ldots \cdot \lambda_{2n-1}(t)(\lambda_1(t) \cdot \ldots \cdot \lambda_{2n-1}(t))^{-1} = 1$, tenemos que $A(t)$ esta en $Sp(2n)$. Vemos entonces que toda $T \in Sp(2n)$ puede ser conectada a la identidad por un camino continuo de $Sp(2n)$. Por lo tanto, $Sp(2n)$ es conexo.
$\square$

2.3. Variedades Simplécticas

Ahora que sabemos bien lo que son Espacios Simplécticos, estamos listos para estudiar las Variedades Simplécticas. Recuerde que consideraremos apenas variedades de dimensión finita.

Definición 2.42 *Sea W una variedad difereniable. Una forma simpléctica en W es una 2-forma diferenciable $\omega \in \Omega^2(W)$ satisfaciendo:*

i) *ω es cerrada, o sea, $d\omega = 0$.*

ii) *ω no degenerada, o sea, $\forall x \in W$ tenemos que $\omega|_x(u, v) = 0$ $\forall v \in T_xW$, entonces $u = 0$.*

Definición 2.43 *Una variedad simpléctica es un par (W, ω) formado por una variedad W y una forma simpléctica ω en W.*

Note que en **ii)** el par $(T_xW, \omega|_x)$ es un espacio vectorial simpléctico, para cada $x \in W$. Más aun, como $\dim W = \dim T_xW$, entonces toda variedad simpléctica es de dimension par.
Una pregunta natural que puede surgir es: toda variedad de dimension par admite forma simpléctica? La respuesta a esta pregunta será dada en el Lema 2.46.
Sigue del Lema 2.32 que toda variedad simpléctica de dimension $2n$ tiene una forma de volumen

$$\Lambda := \frac{\omega^n}{n!}$$

llamada **forma de Liouville**. Por lo tanto, toda variedad simpléctica es orientable.

Definición 2.44 *Sea X un espacio topológico. Dada $x \in X$, denotamos por C_x la unión de los subconjuntos conexos de X que contienen x. Entonces C_x es el mayor subconjunto conexo de X que contiene x. Diremos que C_x es la componente conexa de X que contiene x.*

Por la Proposición 2.22 las componente conexas de una variedad simpléctica (W, ω) tienen dimension par. Si W es $2n$-variedad, entonces el Lema 2.32 nos dice que la $2n$-forma ω^n es una forma de volumen en W y, por lo tanto, W es orientable.

Lema 2.45 *Si (W, ω) es una variedad simpléctica cerrada (compacta), entonces $[\omega] \neq 0$ en $H^2(W, \mathbb{R})$.*

Demostración.-
Sea $[\omega] \in H^2(W, \mathbb{R})$, como $\omega^n \in \Omega^{2n}(W)$ es una forma de volumen (del Lema 2.32), tenemos $\omega^n \neq 0$, luego

$$\int_W \omega^n \neq 0.$$

Por otro lado, si $[\omega]^n = 0$ tenemos que ω^n es exacta, entonces existe una $(n-1)$-forma θ tal que $\omega^n = d\theta$. Por el Teorema de Stokes (Teorema 1.54), tenemos

$$\int_W \omega^n = \int_W d\theta = \int_{\partial W} \theta = 0 \qquad (W \text{ no tiene borde}),$$

que es una contradicción, entonces $[\omega]^n \neq 0$.

□

El siguiente Lema nos dice que no toda variedad de dimensión par admite forma simpléctica.

Lema 2.46 *Si $k \geq 3$, entonces S^k no admite forma simpléctica.*

Demostración.-

Como $H^2(S^k, \mathbb{R}) = 0$, $\forall k \geq 3$, entonces $[\omega] = 0$ en $H^2(S^k, \mathbb{R})$. Del Lema 2.45, tenemos que la variedad S^k no admite forma simpléctica.

□

Presentaremos algunos ejemplos de variedades simplécticas.

Ejemplo 2.47 *Sean la 2-esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ y $p \in S^2$, definimos la 2-forma ω en S^2, como*

$$\omega_p(u, v) = \langle u \times v, p\rangle \text{ para todo } u, v \in T_pS^2.$$

El par (S^2, ω) es una variedad simpléctica. (Figura 2.3).

El Ejemplo 2.47 se tiene pues la 2-esfera es la única esfera que admite forma simpléctica.

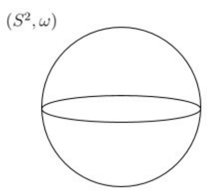


Figura 2.3: 2-esfera

Ejemplo 2.48 *Sean $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = 1\}$ el cilindro y $p = (x, y, z) \in M$, definimos la 2-forma ω en M, como*

$$\omega_p(u, v) = \langle u, (x, y, 0) \times v\rangle \text{ para todo } u, v \in T_pM.$$

El par (M, ω) es una variedad simpléctica.(Figura 2.4).

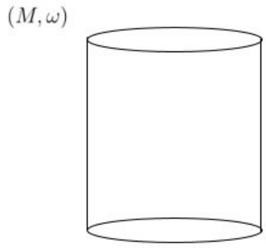


Figura 2.4: Cilindro

Ejemplo 2.49 *Considere $\mathbb{R}^{2n}$ con coordenadas $(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)$ y $\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$. Tenemos que $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ es una variedad simpléctica. De hecho, pues $\mathbb{R}^{2n}$ es una variedad diferencial y ω_0 es una 2-forma diferencial, en el ejemplo 2.6 mostramos que ω_0 es no degenerada, resta probar que ω_0 es cerrada, pero*

$$\begin{aligned} d\omega_0 &= d(\sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} d(dq_i) \wedge dp_i + (-1)^{deg(dq_i)} dq_i \wedge d(dp_i) \\ &= 0 \qquad\qquad (d^2 = 0). \end{aligned}$$

Luego $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ es una variedad simpléctica.

Ejemplo 2.50 *Sean (M_1,ω_1) y (M_2,ω_2) dos variedades simplécticas. Sea $M = M_1 \times M_2$, y considere las proyecciones $pr_1 : M \to M_1$ y $pr_2 : M \to M_2$. Entonces $\omega = pr_1^*\omega_1 + pr_2^*\omega_2\omega_2$ es una forma simpléctica en M.*

El siguiente ejemplo, es muy importante pues muestra que todo fibrado cotagente tiene una estructura simpléctica canónica, y por lo tanto cualquier variedad esta naturalmente asociada a una variedad simpléctica.

Ejemplo 2.51 *Sean X una variedad, $T^*(X)$ su fibrado cotangente y la proyección natural,*

$$\widetilde{\pi} : T^*X \to X \quad , \quad \widetilde{\pi}(\tau) = m \ si \ \tau \in T_m^*(X).$$

Sea $U \subset X$ un abierto con coordenadas $(x^1,\ldots,x^n)$. Entonces tenemos $1-$formas $dx^i \in \Omega^1(U)$ asociadas y, para cada $q \in U$, el conjunto $\{dx^1|_q,\ldots,dx^n|_q\}$ es una base para T_q^*X. Si $\xi \in T_q^*X$, entonces $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx^i|_q$, donde $\xi_i \in \mathbb{R}$ son únicamente determinados por ξ. Tenemos, por lo tanto, coordenadas naturales

$$(x^1,\ldots,x^n,\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^{2n}$$

en T^*U. Podemos considerar las $1-$formas $\widetilde{dx^i} := \widetilde{\pi}^* dx^i \in \Omega^1(T^*U)$ y definir la $1-$forma tautológica α_{taut} y la forma simpléctica canónica ω_{can} en T^*U por

$$\alpha_{taut} := \sum_{i=1}^{n} \xi_i \widetilde{dx^i}, \qquad \omega_{can} := d\alpha_{taut} = \sum_{i=1}^{n} d\xi_i \wedge \widetilde{dx^i}.$$

Observación 2.52 *Existe una version alternativa de la definición de α_{taut} que es independiente de las coordenadas.*

Para que (T^*X, ω_{can}) sea una variedad simpléctica, probaremos la siguiente proposición.

Proposición 2.53 *Las formas α_{taut} y ω_{can} no dependen de las coordenadas y, por lo tanto, están globalmente definidas en T^*X.*

Demostración.-
Como $\omega_{can} = d\alpha_{taut}$, basta verificar que α_{taut} no depende de las coordenadas. Sea $V \subset X$ otro abierto previsto de coordenadas $(y^1, \ldots, y^n)$. Tenemos entonces un sistema de coordenadas naturales $(y^1, \ldots, y^n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ definidas en T^*V. Como

$$dx^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \text{ en } U \cap V, \tag{2.17}$$

$\widetilde{dy^j} = \widetilde{\pi}^* dy^j$, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \widetilde{dy^j} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \widetilde{\pi}^* dy^j \\ &= \widetilde{\pi}^* \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \\ &= \widetilde{\pi}^* dx^i \qquad (\text{ de } (2.17)) \\ &= \widetilde{dx^i}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\widetilde{dx^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \widetilde{dy^j} \text{ en } T^*(U \cap V). \tag{2.18}$$

Entonces, obtenemos

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx^i \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \qquad (\text{ de } (2.17)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \zeta_j dy^j, \end{aligned}$$

donde $\zeta_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$. Luego

$$\begin{aligned} \alpha_{taut} &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \widetilde{dx^i} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \widetilde{dy^j} \qquad \text{(de (2.18))} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \widetilde{dy^j}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, α_{taut} no depende de las coordenadas, entonces ω_{can} no depende de las coordenadas.

□

Por lo tanto, el fibrado cotangente T^*X se torna variedad simpléctica cuando previsto de la forma simpléctica $\omega_{can} = d\alpha_{taut}$.

Definición 2.54 *Una aplicación simpléctica $\varphi : (W_1, \omega_1) \to (W_2, \omega_2)$ entre variedades simplécticas es una aplicación diferenciable satisfaciendo $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. Si φ fuera un difeomorfismo, entonces se dice que φ es un simplectomorfismo.*

Definición 2.55 *Sea (M, ω) variedad simpléctica. Una subvariedad $N \hookrightarrow M$ (o, más general, una inmersión) es llamada **coisotrópica** (respectivamente **isotrópico**, **lagrangiana**, **simpléctica**) si, para todo $x \in M$, T_xN es un subespacio coisotrópico (respectivamente isotrópico, lagrangiano, simpléctico) de (T_xM, ω_x).*

Proposición 2.56 *Sean (M_1, ω_1) y (M_2, ω_2) dos variedades simplécticas, y denotemos por $\overline{M}_2$ la variedad simpléctica $(M_2, -\omega_2)$. Un difeomorfismo $\varphi : M_1 \to M_2$ es un simplectomorfismo si y solamente si el gráfico de φ,*

$$graf(\varphi) = \{(x, \varphi(x)), x \in M_1\}$$

es subvariedad lagrangiana de $M_1 \times \overline{M}_2$.

Para la demostración ver [2] pagina 42.

Definición 2.57 *Sea M una variedad diferenciable. Una estructura casi compleja en M es un automorfismo $J : TM \to TM$ tal que $J^2 = -Id$. En otras palabras, cada espacio tangente T_pM es provisto de una estructura compleja J_p de modo que J_p varia suavemente en p.*

Definición 2.58 *Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Una estructura casi compleja J en M es compatible con ω se, para todo $p \in M$, J_p es compatible con ω_p. Así, ω e J definen una métrica riemanniana g en M dada por*

$$\begin{aligned} g_p : T_pM \times T_pM &\to \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto g_p(X, Y) := \omega_p(X, J_xY). \end{aligned}$$

Denotamos por $\mathcal{J}(M,\omega)$ el espacio de las estructuras casi complejas en M que son compatible con ω.

Teorema 2.59 *Sea (M,ω) una variedad simpléctica. Entonces existen estructuras casi complejas compatibles con ω.*

Definición 2.60 *Una variedad casi Kähler es una variedad simpléctica (M,ω) equipada con una estructura casi compleja J compatible con ω.*

Definición 2.61 *Una estructura casi compleja J en M es integrable si existe un sistema de coordenadas $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ en M tal que*

$$d\varphi_\alpha \circ J = J_0 \circ d\varphi_\alpha$$

donde J_0 es la estructura compleja en $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$.

Definición 2.62 *Una variedad Kähler es una variedad casi Kähler (M,ω,J) tal que la estructura casi compleja J es integrable.*

2.4. Geometría de Contacto

En esta sección, presentaremos dos formas de definir una forma de contacto, y luego mostraremos que estas dos definiciones son equivalentes. La primera definición es la siguiente:

Definición 2.63 *Sea M una variedad de dimension $2n+1$, donde $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Decimos que la 1-forma λ en M es de contacto si*

$$\lambda \wedge (d\lambda)^n \textit{ nunca se anula.} \tag{2.19}$$

Por definición, si λ es forma de contacto, entonces $\lambda \wedge (d\lambda)^n$ define una forma de volumen en M y, por lo tanto, M debe ser orientable.

Definición 2.64 *El campo de Reeb X_λ asociado a la forma de contacto λ en M es definida implícitamente por*

$$\begin{cases} i_{X_\lambda} d\lambda = 0 \\ i_{X_\lambda}\lambda = 1. \end{cases} \tag{2.20}$$

Ahora presentaremos otra definición de una forma de contacto.

Definición 2.65 *Sea M una variedad. Una 1-forma λ se dice de contacto si $d\lambda|_p$ es no degenerada en $\ker\lambda|_p$, $\forall p \in M$.*

Observación 2.66 *En la definición 2.65 tenemos una 2-forma $d\lambda|_p$ no degenerada en el espacio vectorial $\ker\lambda|_p$, por lo tanto, $(\ker\lambda|_p, d\lambda|_p)$ es un espacio vectorial simpléctico.*

Recuerde que si V un espacio vectorial y f una forma bilineal en V, tenemos que

$$\ker f = \{u \in V | f(u,v) = 0, \forall v \in V\}.$$

Lema 2.67 *Sea M una variedad cargada de una 1-forma de contacto λ, en el sentido de la definición 2.65. Entonces* $\dim \ker \lambda = \dim M - 1$.

Demostración.-
Sea $p \in M$. Sabemos que $\lambda|_p : T_pM \to \mathbb{R}$, entonces $Im\lambda|_p \subset \mathbb{R}$. Luego $\dim Im\lambda|_p \leq \dim \mathbb{R} = 1$ e, así, $\dim Im\lambda|_p = 1$ o 0.
Se $\dim Im\lambda|_p = 0$, entonces $Im\lambda|_p = \{0\}$, esto es, $\lambda|_p(u) = 0$, $\forall u \in T_pM$, luego $\lambda|_p = 0$ y como p es arbitrario en M tenemos que $\lambda = 0$. Luego $d\lambda = 0$, pero $d\lambda|_p$ es no degenerada en $ker\lambda|_p$ que es una contradicción, por lo tanto, $\dim Im\lambda|_p = 1$.
Así, como

$$\begin{aligned}
\dim Im\lambda|_p + \dim \ker \lambda|_p &= \dim T_pM \\
1 + \dim \ker \lambda|_p &= \dim M \\
\dim \ker \lambda|_p &= \dim M - 1.
\end{aligned}$$

Como p es arbitrario tenemos $\dim \ker \lambda|_p = \dim M - 1$, $\forall p \in M$.

Lema 2.68 *Sea M una variedad que carga una 1-forma de contacto en el sentido de la definición 2.65. Entonces $\dim M$ es impar.*

Demostración.-
Fijando $p \in M$ arbitrariamente, la 1-forma no puede se anular idénticamente en una vecindad cualquier U de p pues, caso contrario, tendríamos $d\lambda|_U = 0$, por lo tanto, $d\lambda|_p$ es degenerada, lo que es imposible ya que λ es de contacto. Luego existe p' arbitrariamente próximo de p tal que $\lambda|_{p'} \neq 0$. Suponga que $\dim T_{p'}M = \dim M$ es par. Del Lema 2.67, tenemos que $\dim \ker \lambda|_{p'} = \dim T_{p'}M - 1$, por lo tanto, $\dim \ker \lambda|_{p'}$ es impar, que es una contradicción, pues en la observación 2.66 vimos que $(\ker \lambda|_{p'}, d\lambda|_{p'})$ es un espacio vectorial simpléctico, o sea, $\ker \lambda|_{p'}$ es de dimension par, luego $\dim M$ es impar.
□

Lema 2.69 *Sea M una variedad que carga una 1-forma de contacto en el sentido de la definición 2.65. Entonces* $\dim(\ker d\lambda|_p) = 1$ *y* $T_pM = \ker \lambda|_p \oplus \ker d\lambda|_p$, $\forall p \in M$.

Demostración.-
Por el Lema 2.68 sabemos que $\dim M$ es impar, vamos a suponer que $\dim M = 2n+1$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Considere $p \in M$. Del Lema 2.67, tenemos que $\dim \ker \lambda|_p = (2n+1) - 1 = 2n$.
Por otro lado, recordemos como se definen los núcleos de $\lambda|_p$ y $d\lambda|_p$

$$\begin{aligned}
\ker \lambda|_p &= \{u \in T_pM | \ \lambda|_p(u) = 0\} \\
\ker d\lambda|_p &= \{u \in T_pM | \ d\lambda|_p(u,v) = 0, \forall v \in T_pM\},
\end{aligned}$$

por lo tanto, $\ker \lambda|_p$ y $\ker d\lambda|_p$ son subconjuntos de T_pM.
Si $\ker d\lambda|_p = \{0\}$. Entonces $d\lambda|_p$ es no degenerada en T_pM, luego $(T_pM, d\lambda|_p)$ es un espacio vectorial simpléctico, por lo tanto, $\dim T_pM$ es par, que es una contradicción, pues $\dim T_pM = \dim M$ es impar. Luego $\ker d\lambda|_p \neq \{0\}$ u , así, $\dim\ker d\lambda|_p \geq 1$.
Por otro lado también tenemos que $\ker \lambda|_p \cap \ker d\lambda|_p = \{0\}$, pues si existe $u \neq 0$ tal que $u \in \ker \lambda|_p \cap \ker d\lambda|_p$, entonces

$$\begin{aligned}
&u \in \ker \lambda|_p \text{ y } u \in \ker d\lambda|_p\\
&u \in \ker \lambda|_p \text{ y } d\lambda|_p(u,v) = 0 \ \ \forall v \in T_pM\\
&u \in \ker \lambda|_p \text{ y } d\lambda|_p(u,v) = 0 \ \ \forall v \in \ker \lambda|_p \subset T_pM
\end{aligned}$$

y como $d\lambda|_p$ es no degenerada en $\ker \lambda|_p$, tenemos que $u = 0$, que es una contradicción. Por lo tanto, $\ker \lambda|_p \cap \ker d\lambda|_p = \{0\}$ y, así,

$$\ker \lambda|_p \oplus \ker d\lambda|_p \subseteq T_pM. \tag{2.21}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\dim(\ker \lambda|_p) + \dim(\ker d\lambda|_p) &\leq \dim T_pM\\
2n + \dim(\ker d\lambda|_p) &\leq 2n+1\\
\dim(\ker d\lambda|_p) &\leq 1,
\end{aligned}$$

pero tenemos $\dim(\ker d\lambda|_p) \geq 1$, entonces $\dim(\ker d\lambda|_p) = 1$. Por último, tenemos

$$\dim(\ker \lambda|_p \oplus \ker d\lambda|_p) = \dim(\ker \lambda|_p) + \dim(\ker d\lambda|_p) = 2n+1 = \dim T_pM, \tag{2.22}$$

por lo tanto, de (2.21) tenemos $\ker \lambda|_p \oplus \ker d\lambda|_p = T_pM$, como p es arbitrario en M tenemos que $\dim(\ker d\lambda|_p) = 1$ y $T_pM = \ker \lambda|_p \oplus \ker d\lambda|_p$, $\forall p \in M$.
□
El siguiente lema muestra que las dos definiciones de forma de contacto que presentamos son equivalentes.

Lema 2.70 *Las definiciones 2.63 y 2.65 de forma de contacto son equivalentes.*

Demostración.-
Sea $\dim M = 2n+1$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si λ satisface la definición 2.63, tenemos que

$$\lambda \wedge (d\lambda)^n \text{ nunca se anula.}$$

Si $(d\lambda|_p)^n$ se anula en el $\ker \lambda|_p$, entonces $\lambda|_p \wedge (d\lambda|_p)^n$ se anula en el $ker\lambda|_p$, que es una contradicción, pues $\lambda \wedge (d\lambda)^n$ nunca se anula, por lo tanto, $(d\lambda|_p)^n$ no se anula en $\ker \lambda|_p$, y, así, del Lema 2.32, tenemos que $d\lambda|_p$ es forma simpléctica, o sea, $d\lambda|_p$ es no degenerada en $\ker \lambda|_p$. Por último, como p es arbitrario, tenemos que λ satisface la definición 2.65. Recíprocamente, suponga que λ satisface la definición 2.65. Fije

$p \in M$, como $(\ker \lambda|_p, d\lambda_p)$ es un espacio vectorial simpléctico, escogiendo una base simpléctica $\{e_1, f_1 \ldots, e_n, f_n\}$ de $(\ker \lambda|_p, d\lambda|_p)$ tenemos que

$$d\lambda|_p(e_i, e_j) = d\lambda|_p(f_i, f_j) = 0, \;\; d\lambda|_p(e_i, f_j) = \delta_{ij},$$

para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Además, sabemos do Lema 2.69 que la $\dim(\ker d\lambda|_p) = 1$ y $T_pM = \ker \lambda|_p \oplus \ker d\lambda|_p$, entonces existe $v \in T_pM \setminus \ker \lambda|_p$ tal que $\ker d\lambda|_p = \mathbb{R}v$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lambda|_p \wedge (d\lambda|_p)^n(v, e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n) &= \lambda|_p(v) d\lambda|_p(e_1, f_1) \cdot \ldots \cdot d\lambda|_p(e_n, f_n) + 0 \ldots + 0 \\ &= \lambda|_p(v) \neq 0 \quad (\text{pues } v \in T_pM \setminus \ker \lambda|_p), \end{aligned}$$

luego $\lambda|_p \wedge (d\lambda|_p)^n$ nunca se anula y, así, λ satisface la definición 2.63.
□

Lema 2.71 *Sea M una variedad que carga una 1-forma de contacto λ. Entonces el campo de Reeb X_λ existe y es único.*

Demostración.-
Como $\lambda|_p \neq 0$, $\forall p \in M$, tenemos que existe un campo Z tal que $\lambda|_p(Z_p) \neq 0$, $\forall p \in M$. Consideramos ahora $W_p = \frac{Z_p}{\lambda|_p(Z_p)} \in T_pM$ y notamos que

$$\begin{aligned} \lambda|_p(W_p) &= \lambda|_p \left(\frac{Z_p}{\lambda|_p(Z_p)} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda|_p(Z_p)} \lambda|_p(Z_p) = 1. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $T_pM = \ker \lambda|_p \oplus d\lambda|_p$ tenemos que $W_p = Y_p + X_p$, donde $Y_p \in \ker \lambda|_p$ y $X_p \in d\lambda|_p$. Luego

$$\begin{aligned} \lambda|_p(W_p) &= \lambda|_p(Y_p + X_p) \\ &= \lambda|_p(Y_p) + \lambda|_p(X_p) \\ &= 0 + \lambda|_p(X_p) \;\; (Y_p \in \ker \lambda|_p) \end{aligned}$$

y, así, $\lambda|_p(X_p) = \lambda|_p(W_p) = 1$, con $X_p \in ker d\lambda|_p$.
Para ver que es único, suponga que existe $\tilde{X}_p \in \ker d\lambda|_p$ tal que $\lambda|_p(\tilde{X}_p) = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \lambda|_p(X_p) &= \lambda|_p(\tilde{X}_p) = 1 \\ \lambda|_p(X_p - \tilde{X}_p) &= 0, \end{aligned}$$

luego $X_p - \tilde{X}_p \in \ker \lambda|_p$, y como X_p, $\tilde{X}_p \in \ker d\lambda|_p$ tenemos $X_p - \tilde{X}_p \in \ker d\lambda|_p$, por lo tanto, $X_p - \tilde{X}_p \in \ker d\lambda|_p \cap \ker \lambda|_p = \{0\}$, o sea, $X_p = \tilde{X}_p$. Por último, como $p \in M$ es arbitrario y $i_{X_p}\lambda|_p = \lambda|_p(X_p) = 1$ y $X_p \in ker d\lambda|_p$ $(i_{X_p} d\lambda|_p = d\lambda|_p(X_p, \cdot) = 0)$, tenemos que

$$\begin{cases} i_X d\lambda = 0 \\ \;\; i_X \lambda = 1, \end{cases}$$

por lo tanto, X es el campo de Reeb asociado a la forma de contacto λ en M.
□

Ejemplo 2.72 *La* 1*-forma*

$$\lambda_0 = dz + \sum_{i=1}^{n} x_i dy_i,$$

donde $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z)$ *son coordenadas en* $\mathbb{R}^{2n+1}$ *es una forma de contacto en* $\mathbb{R}^{2n+1}$*. De hecho, pues*

$$\begin{aligned} d\lambda_0 &= d(dz + \sum_{i=1}^{n} x_i dy_i) \\ &= d(dz) + \sum_{i=1}^{n}(dx_i \wedge dy_i + x_i \wedge d(dy_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \quad (d^2 = 0), \end{aligned}$$

luego

$$(d\lambda_0)^n = n!(dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n).$$

Por último,

$$\begin{aligned} \lambda_0 \wedge (d\lambda_0)^n &= (dz + \sum_{i=1}^{n} x_i dy_i) \wedge n!(dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n) \\ &= n!(dz \wedge dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n), \end{aligned}$$

entonces $\lambda_0 \wedge (d\lambda_0)^n$ *nunca se anula y, así,* λ_0 *es una forma de contacto en* $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Ejemplo 2.73 *La* 1*-forma* $\alpha = (cosz)dx + (senz)dy$ *donde* (x, y, z) *son coordenadas en* $\mathbb{R}^3$ *es una forma de contacto en* $\mathbb{R}^3$*. De hecho*

$$d\alpha = (senz)dx \wedge dz - (cosz)dy \wedge dz,$$

luego

$$\begin{aligned} \alpha \wedge d\alpha &= ((cosz)dx + (senz)dy) \wedge ((senz)dx \wedge dz - (cosz)dy \wedge dz) \\ &= (senz)^2 dy \wedge dx \wedge dz - (cosz)^2 dx \wedge dy \wedge dz \\ &= -dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

entonces $\alpha \wedge d\alpha$ *nunca se anula y, así,* α *es una forma de contacto en* $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.74 *Sea* $(x_1, y_1, \ldots, x_{n+1}, y_{n+1})$ *coordenadas Cartesianas en* $\mathbb{R}^{2n+2}$*. La* 1*-forma* $\alpha = \sum_{j=1}^{n+1}(x_j dy_j - y_j dx_j)$ *es una forma de contacto en la* $2n+1$*-esfera* S^{2n+1}.

Ejemplo 2.75 *La* 1*-forma* $\alpha = (cosr)dz + r(senr)d\theta$ *donde* (r, θ, z) *son coordenadas cilíndricas en* $\mathbb{R}^3$ *es una forma de contacto en* $\mathbb{R}^3$*. Para la prueba ver [16].*

Definición 2.76 *Una estructura de contacto en una variedad M es una distribución $\xi \subset TM$ de codimension 1 localmente definida por formas de contacto. El par (M, ξ) es dicho una variedad de contacto.*

Observación 2.77 *Si λ es forma de contacto en M, entonces*

$$\xi := \ker \lambda$$

es estructura de contacto.

Definición 2.78 *Sean (M_1, ξ_1), (M_2, ξ_2) variedades de contacto. Decimos que un difeomorfismo $\varphi : M_1 \to M_2$ es un contactomorfismo si $\varphi_* \xi_1 = \xi_2$.*

Un hecho muy importante es que, a partir de una variedad de contacto podemos construir una variedad simpléctica.

Teorema 2.79 *Sea (M, ξ) una variedad de contacto, entonces $M \times \mathbb{R}$ con la 2-forma $\omega = d(e^t \xi)$ es una variedad simpléctica. Esta construcción es llamada de simplectización de M.*

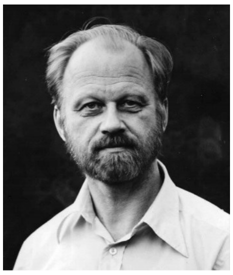
Capítulo 3

El Teorema de Darboux para Formas Simplécticas

3.1. El Truco de Moser

Jürgen Kurt Moser (Königsberg 1928 - Schwerzenbach 1999) fue un matemático alemán - estadounidense cuya pesquisa tuvo un efecto profundo en la matemática, así como en la astronomía y en la física. El hizo contribuciones profundas y importantes para una gama extremamente amplia de cuestiones en sistemas dinámicos y mecánica celeste, ecuaciones diferenciales parciales, análisis funcional no lineal, geometría diferencial y compleja y el cálculo de variaciones.
Moser nació en Königsberg, Alemania en el año 1928. A los 15 años fue reclutado en una fuerza auxiliar militar, lo que lo ayudo a el ne esos momentos difíciles fue el hábito de buscar refugio en la matemática que el desenvolvió por primera vez en el cuartel. "Yo me olvide del mundo exterior y pensé en un problema matemático que invente y intente resolver en mi cabeza", recordó él. "Eso fue muy reconfortante, los policías podían gritar conmigo lo que quisiesen."Después de la guerra, él paso dos años terminando la secundaria en el que, mas tarde, se torno la Alemania Oriental. Él huyó para el oeste en 1947 para estudiar en Göttingen.
Una Beca Fulbright permitió que el Dr. Moser pasase un año en Nueva York. Después el retornaría brevemente a Göttingen para trabajar como asistente de Siegel, escribiendo un libro sobre mecánica celeste con su mentor. En septiembre de 1955, volvió a N.Y.U. y se caso con Gertrude Courant. Dos años después, el acepto un cargo en el M.I.T. Convirtiéndose en ciudadano de los EUA en 1959 y, un año después, acepto una oferta para retornar al Instituto Courant como profesor. En 1965 publico su articulo "On the volume elements on a manifold"donde él uso el truco de Moser por primera vez. En 1967, asumió la dirección del Instituto Courant de Ciencias Matemáticas, sirviendo tres años, y en el año 1984 fue director del Instituto de Investigación de Matemática de la ETH. Se retiro en 1995, año en que recibió el premio Wolf de matemática. El también servio como presidente de la Unión Internacional de Matemática de 1983 a 1986. El Dr. Moser murió en Schwerzenbach, Suiza

en el año 1999.



El truco de Moser fue usado por Moser, como mencionamos en la biografía, en uno de sus artículos llamado “On the volume elements on a manifold”, publicado en 1965, para probar que en cualquier variedad orientable compacta, cualesquier dos formas de volumen normalizadas son equivalentemente difeomórficas. Este teorema será enunciado a seguir:

Teorema 3.1 *Sea M variedad compacta, conexa y orientada de dimension n. Sean τ_0, $\tau_1 \in \Omega^n(M)$ formas de volumen tal que*

$$\int_M \tau_0 = \int_M \tau_1.$$

Entonces existe un difeomorfismo $\varphi : M \to M$ tal que $\varphi^*\tau_1 = \tau_0$.

Demostración.-
Definamos la familia de n-formas en M dada por las combinaciones convexas de τ_1 y τ_0

$$\tau_t = (1-t)\tau_0 + t\tau_1, \ \ t \in [0,1],$$

notando que cada τ_t es forma de volumen y $d\tau_t = 0$ pues, el grado $d\tau = n+1 > n = \dim M$. La hipótesis de que τ_0 y τ_1 tienen la misma integral sobre M asegura que esas formas son comohomólogas, o sea, existe $\beta \in \Omega^{n-1}(M)$ tal que $\tau_1 = \tau_0 + d\beta$, de modo que

$$\begin{aligned} \tau_t &= (1-t)\tau_0 + t\tau_1 \\ &= (1-t)\tau_0 + t(\tau_0 + d\beta) \\ &= \tau_0 + td\beta. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Queremos encontrar una isotopia $\varphi_t : M \to M$, $t \in [0,1]$, tal que $\varphi_0 = id$ y

$$\varphi_t^*\tau_t = \tau_0, \ \ \forall t \in [0,1]. \tag{3.2}$$

De esta forma φ_1 satisface $\varphi_1^*\tau_1 = \tau_0$.
La isotopia será obtenida integrándose un campo de vectores X_t, $t \in M$. Para esto, derivemos (3.2)

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}(\varphi_t^*\tau_t) &= \varphi_t^*\left(\mathcal{L}_{X_t}\tau_t + \frac{d\tau_t}{dt}\right) && \text{(del Lema 1.53)} \\ &= \varphi_t^*(i_{X_t}d\tau_t + di_{X_t}\tau_t + \frac{d}{dt}(\tau_0 + td\beta)) && \text{(Teorema 1,6 iii) y (3.1))} \\ &= \varphi_t^*(di_{X_t}\tau_t + d\beta) && (d\tau_t = 0) \\ &= \varphi_t^*(d(i_{X_t}\tau_t + \beta)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Entonces, para poder tener $\varphi_t^*(d(i_{X_t}\tau_t + \beta)) = 0$, debemos encontrar X_t, $t \in [0,1]$, satisfaciendo $d(i_{X_t}\tau_t + \beta) = 0$, o sea,

$$i_{X_t}\tau_t + \beta = 0. \tag{3.4}$$

Como τ_t es una forma de volumen, la aplicación $\mathfrak{X}(M) \to \Omega^{n-1}(M)$, $X \mapsto i_X\tau_t$, es un isomorfismo para cada t. Por lo tanto, para cada t, (3.4) tiene solución única. El flujo de X_t define una isotopia φ_t satisfaciendo $\varphi_t^*\tau_t = \tau_0$, por último, tomando $\varphi = \varphi_1$ tenemos el difeomorfismo deseado.
$\square$

El truco de Moser consiste esencialmente en la forma en la cual fue obtenido el difeomorfismo φ en la demostración del Teorema 3.1. Veremos como este método será usado en la demostración del teorema de Darboux, y así veremos que el es pieza fundamental en la demostración de varios resultados de rigidez local. El Truco de Moser aprovecha las principales características de una forma simpléctica para mostrar la equivalencia de estructuras simplécticas.

3.2. El Teorema de Darboux - Formas Simplécticas

Jean Gaston Darboux (Nîmes 1842 - Paris 1917) fue un matemático Francés que hizo grandes contribuciones a la matemática. Él recibió su Doctorado en la École Normal Supérieure (ENS) en 1866 con la tesis titulada "Sur les surfaces orthogonales", bajo la orientación de Michel Chasles. Durante sus estudios en la ENS, el también recibió conferencias en la Universidad Sorbonne y Collège de Francia.
Él participo en la fundación de la École Normale Supérieure de Jeunes Filles en 1880, un instituto que tenía como objetivo la formación de educadoras. Su primera directora fue Julie Favre. En 1884, Darboux fue elegido para la Académie des Sciences.
Darboux hizo varias contribuciones importantes a la geometría y al análisis matemático. Fue biógrafo de Henri Poincaré y editó las obras seleccionadas de Joseph

Fourier. Entre sus alumnos se encuentran Émile Borel, Élie Cartan, Émile Picard, Gheorghe Titeica y Stanislaw Zaremba. En 1900, fue nombrado secretario permanente de la Academia en su sección de Matemáticas. En 1902, el fue elegido para la Royal Society, en 1916, recibió la Medalla Sylvester de la Sociedad. En 1908, fue ponente en el Congreso Internacional de Matemátia (ICM) en Roma.
Debido a las grandes contribuciones que Darboux hizo en la matemática varios objetos llevando su nombres, entre los cuales se encuentra: Carta de Darboux, Derivada de Darboux, integral de Darboux, vector de Darboux y Teorema de Darboux en Geometría Simpléctica. Nosotros nos estamos centrando en este último.

Ahora enunciaremos el Teorema de Darboux para formas simplécticas, el cual nos dice que variedades simplécticas no poseen invariantes locales, esto es, localmente todas ellas son simplectomorfas al espacio simpléctico padrón $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. El teorema de Darboux fue probado por primera vez, en una forma ligeramente diferente, por Gaston Darboux en 1882, en conexión con su trabajo sobre ecuaciones diferenciales ordinarias que surgen en la mecánica clásica. Nosotros veremos la prueba de este teorema usando el truco de Moser.

Teorema 3.2 ***(Teorema de Darboux para Formas Simplécticas)*** *Sea (W, ω) una variedad simpléctica de dimension $2n$ y sea $p \in W$. Considere $\mathbb{R}^{2n}$ previsto da forma simpléctica canónica ω_0 (2.1). Entonces existen vecindades $U \subset W$ de p, $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ y un simplectomorfismo $\varphi : U \to V$ tal que $\varphi(p) = 0$ y $\varphi^*\omega_0 = \omega$.*

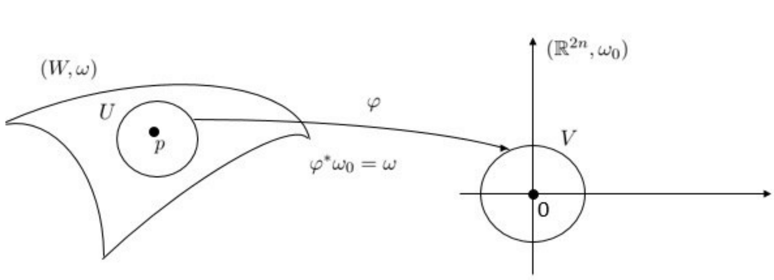


Figura 3.1: Simplectomorfismo φ

Demostración.-
Como W es una variedad diferencial y $p \in W$, existe un homeomorfismo $\psi : U_1 \to V$, donde $U_1 \subset W$ vecindad de p, $V = \psi(U_1) \subset \mathbb{R}^{2n}$ vecindad $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ y $\psi(p) = 0$. Además, como $\psi^{-1} : V \to U_1$ y $\omega \in \Omega^2(U_1)$, tenemos $\Omega = (\psi^{-1})^*\omega \in \Omega^2(V)$ (Figura 3.2). Por otro lado, como T_0V es un espacio vectorial real y $\Omega|_0$ es forma

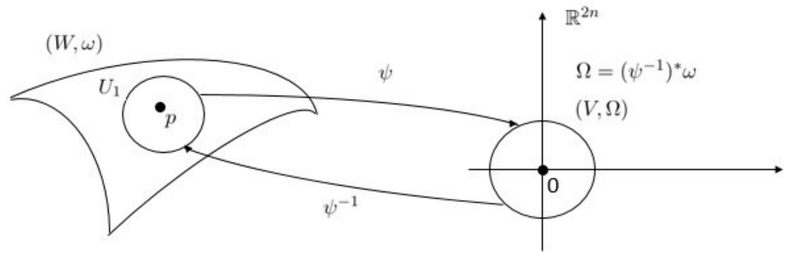


Figura 3.2: Amplificación ψ

bilineal antisimétrica y no degenerada tenemos que $(T_0V, \Omega|_0)$ es un espacio vectorial simpléctico. De la Proposición 2.25, existe

$$M : (T_0V, \Omega|_0) \to (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0), \text{ con } M(0) = 0 \text{ y } \Omega|_0 = M^*\omega_0.$$

Como $T_0V \approx \mathbb{R}^{2n}$, tenemos

$$M : (\mathbb{R}^{2n}, \Omega|_0) \to (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0), \text{ con } M(0) = 0 \text{ y } \Omega|_0 = M^*\omega_0,$$

además, como $M^{-1} : M(V) \to V$ y $\Omega \in \Omega^2(V)$ tenemos $\Omega' = (M^{-1})^*\Omega \in \Omega^2(M(V))$ (Figura 3.3).

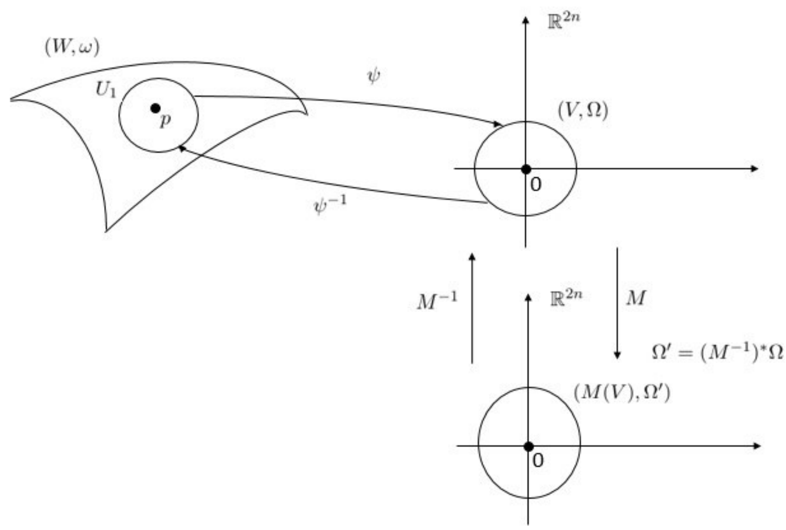


Figura 3.3: Aplicación M

Como $\Omega|_0 = M^*\omega_0$, tenemos

$$\begin{aligned} \Omega|_0(\alpha, \beta) &= M^*\omega_0(\alpha, \beta), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{2n} \\ &= \omega_0(M\alpha, M\beta), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{2n} \ \text{(definición de } M^*) \end{aligned}$$

cambiando α con $M^{-1}\alpha$ y β con $M^{-1}\beta$ tenemos

$$\Omega|_0(M^{-1}\alpha, M^{-1}\beta) = \omega_0(\alpha,\beta)\ \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{3.5}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\Omega'|_0(u,v) &= ((M^{-1})^*\Omega)|_0(u,v),\ \ \forall u,v \in \mathbb{R}^{2n}\\
&= \Omega|_{M^{-1}(0)}(M^{-1}u, M^{-1}v),\ \ \forall u,v \in \mathbb{R}^{2n}\ \ (\text{definición de } (M^{-1})^*)\\
&= \Omega|_0(M^{-1}u, M^{-1}v),\ \ \forall u,v \in \mathbb{R}^{2n}\\
&= \omega_0(u,v),\ \ \forall u,v \in \mathbb{R}^{2n}\ \ (\text{de } 3.5),
\end{aligned}$$

entonces $\Omega'|_0 = \omega_0$.
Si conseguimos Ψ un simplectomorfismo tal que $\Psi(0)=0$ y $\Psi^*\omega_0 = \Omega'$, tendremos

$$\begin{aligned}
\Psi^*\omega_0 &= \Omega'\\
&= (M^{-1})^*\Omega\\
&= (M^{-1})^*(\psi^{-1})^*\omega\\
(\psi)^*(M)^*\Psi^*\omega_0 &= \omega\\
(\Psi\circ M\circ\psi)^*\omega_0 &= \omega.
\end{aligned}$$

Tomando $\varphi = \Psi\circ M\circ\psi$, vamos a tener un simplectomorfismo φ tal que $\varphi^*\omega_0 = \omega$ y $\varphi(p) = (\Psi\circ M\circ\psi)(p) = \Psi(M(\psi(p))) = \Psi(M(0)) = \Psi(0) = 0$ y el Teorema quedaría demostrado. Entonces vamos a mostrar que existe ese simplectomorfismo. Tenemos dos formas simplécticas ω_0 y Ω' definidas en una vecindad $\mathcal{U} = M(V)$ de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ tales que $\omega_0|_0 = \Omega'|_0$, esto es, $(\omega_0 - \Omega')|_0 = 0$.
Por una version del Lema de Poincaré (tomando $Q = \{0\}$ y $\eta = \omega_0 - \omega$ en el Teorema 1.58), existen $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ vecindades de 0, y 1-forma μ definida en $\mathcal{U}_0$, tales que $(\omega_0 - \Omega')|_{\mathcal{U}_0} = d\mu$ y $\mu|_0 = 0$. Sea

$$\begin{aligned}
\Omega_t &= (1-t)\Omega' + t\omega_0\\
&= \Omega' + t(\omega_0 - \Omega')\\
&= \Omega' + td\mu \qquad ,t\in[0,1].
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Además, de $(\omega_0 - \Omega')|_{\mathcal{U}_0} = d\mu$ y $(\omega_0 - \Omega')|_0 = 0$, tenemos $d\mu|_0 = 0$. Por lo tanto, podemos disminuir $\mathcal{U}_0$ a $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0$, si es necesario, de modo que para cada $p \in \mathcal{U}_1$, $\Omega_t|_p$ sea simpléctica para todo $t \in [0,1]$. De hecho, para $t=0$ tenemos

$$(\Omega_0|_0)^n = (\Omega'|_0)^n = (\omega_0)^n \neq 0 \quad (\text{pues } \omega_0 \text{ es simpléctica y del Lema 2.32}).$$

Luego, del Lema 2.32, tenemos que $\Omega_0|_0$ es simpléctico. Por otro lado, de la continuidad de Ω_t en t y diferenciabilidad de Ω_t, existe $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0$ tal que $(\Omega_t|_p)^n \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$, $\forall p \in \mathcal{U}_1$, luego Ω_t es simpléctico en $\mathcal{U}_1$ para todo $t\in[0,1]$.
Por otro lado, afirmamos que, para $p \in \mathcal{U}_1$ y para todo $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\Omega_t|_p : T_p\mathcal{U}_1 &\to T_p^*\mathcal{U}_1\\
u &\mapsto \Omega_t|_p(u,\cdot)
\end{aligned}$$

es isomorfimo. De hecho, como $\Omega_t|_p(u,\cdot)=0$, tenemos que $u=0$, pues $\omega_t|_p$ es no degenerada, por lo tanto, $Nu(\Omega_t|_p)=\{0\}$ y, así, $\Omega_t|_p$ es inyectiva. Como $\dim(T_p\mathcal{U}_1)=\dim(T_p^*\mathcal{U}_1)$, tenemos que $\Omega_t|_p$ es sobrejectiva, luego $\Omega_t|_p$ es isomorfismo.
Entonces, dado $-\mu|_p\in T_p^*\mathcal{U}_1$, existe un único $X_t|_p\in T_p\mathcal{U}_0$ tal que

$$\begin{aligned}\Omega_t|_p(X_t|_p,\cdot) &= -\mu|_p\\ i_{X_t|_p}\Omega_t|_p &= -\mu|_p,\end{aligned}$$

luego como tomamos cualquier $p\in\mathcal{U}_1$, tenemos

$$i_{X_t}\Omega_t=-\mu, \tag{3.7}$$

para todo $t\in[0,1]$ en $\mathcal{U}_1$ y depende suavemente de t.
Ahora, note que $X_t|_0=0,\forall t\in[0,1]$. De hecho,

$$\begin{aligned}i_{X_t|_0}\Omega_t|_0 &= -\mu|_0\\ \Omega_t|_0(X_t|_0,\cdot) &= 0 \qquad\qquad (\Omega_t \text{ es no degenerada})\\ X_t|_0 &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $\mathcal{U}_2\subset\mathcal{U}_1$ suficientemente pequeña, podemos integrar X_t hasta $t=1$ [1] y obtener una isotopia $\rho_t:\mathcal{U}_2\to\mathcal{U}_1$, $t\in[0,1]$, satisfaciendo $\rho_0=id$, $\frac{d\rho_t}{dt}=X_t\circ\rho_t$ y $\rho_t(0)=0$ (a partir de (1.2) y de la definición de isotopia).
Tenemos, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_t^*\Omega_t &= \rho_t^*(\frac{d\Omega_t}{dt}+\mathcal{L}_{X_t}\Omega_t) && \text{(del Lema 1.53)}\\ &= \rho_t^*(\frac{d}{dt}(\Omega'+td\mu)+\mathcal{L}_{X_t}\Omega_t) && \text{(de (3.6))}\\ &= \rho_t^*(d\mu+\mathcal{L}_{X_t}\Omega_t)\\ &= \rho_t^*(d\mu+d(i_{X_t}\Omega_t)+i_{X_t}d\Omega_t) && \text{(Teorema 1.51 iii))}\\ &= \rho_t^*(d\mu+d(i_{X_t}\Omega_t)+i_{X_t}0)) && (\Omega_t \text{ es simpléctica})\\ &= \rho_t^*d(\mu+i_{X_t}\Omega_t)\\ &= \rho_t^*d(\mu-\mu) && \text{(de (3.7))}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos $\frac{d}{dt}\rho_t^*\Omega_t=0$ y integrando tenemos

$$\rho_t^*\Omega_t=c,\quad c \text{ constante},$$

tomando $t=0$

$$\begin{aligned}\rho_0^*\Omega_0 &= c\\ id\Omega' &= c\\ \Omega' &= c,\end{aligned}$$

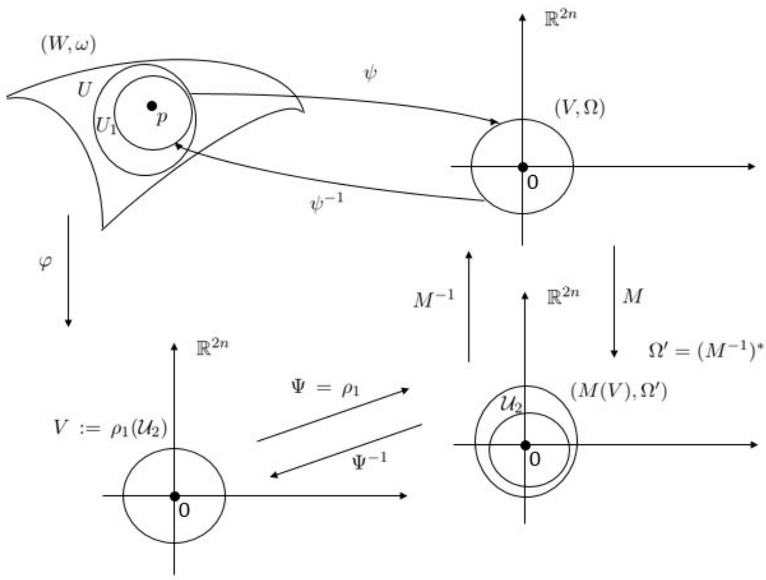


Figura 3.4: Aplicación ρ_1

entonces $\rho_t^*\Omega_t = \Omega'$. Ahora, tomando $t = 1$, tenemos $\rho_1^*\Omega_1 = \Omega'$, esto es, $\rho_1^*\omega_0 = \Omega'$ con $\rho_1 : \mathcal{U}_2 \to \rho_1(\mathcal{U}_2) \subset \mathcal{U}_1$ y $\rho_1(0) = 0$. Tomando $U := (\psi^{-1} \circ M^{-1})(\mathcal{U}_2)$, $V := \rho_1(\mathcal{U}_2)$ y $\Psi = \rho_1$ (Figura 3.4), concluimos la demostración.
□
Del Teorema 3.2, obtenemos el siguiente corolario que nos dice que dos formas simplécticas en variedades simplécticas de la misma dimension son localmente difeomórfas.

Corolario 3.3 *Sean (W_1, ω_1) y (W_2, ω_2) dos variedades simplécticas de dimension $2n$. Dados $p_1 \in W_1$ y $p_2 \in W_2$, existen vecindades $V_1 \subset W_1$ de p_1, $V_2 \subset W_2$ de p_2 y un simplectomorfismo $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ satisfaciendo $\varphi(p_1) = p_2$ y $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$.*

Ahora presentamos un ejemplo del Teorema de Darboux para formas simplécticas.

Ejemplo 3.4 *Sean (S^2, ω) una variedad simpléctica definida en el Ejemplo 2.47 tomando la 2-esfera de radio 1 y $q = (1, 0, 0) \in S^2$. Usando el Teorema 3.2, existen vecindades $U \subset S^2$ de q, $V \subset \mathbb{R}^2$ de $0 \in \mathbb{R}^2$ y un, simplectomorfismo $\varphi : U \to V$ tal que $\varphi(q) = 0$ y $\varphi^*\omega_0 = \omega$. En este caso $\varphi(x, y, z) = (\arctan(\frac{y}{x}), z)$.*

[1]vea [24] capítulo 3.

Bibliografía

[1] Biezuner, R., Notas de Aula Álgebra Linear, Departamento de Matemática, ICEx, Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.

[2] Bursztyn H. e Macarini L., Introdução a Geometria Simplética, 2006.

[3] Cannas Da Silva, A., Introduction to Symplectic and Hamiltonian Geometry, Notes for a Short Course at IMPA, Rio de Janeiro, 2002.

[4] Chaidez, J., Solutions to Introduction To Symplectic Topology (2nd Ed.) by Dusa McDuff and Dietmar Salamon, 2016.

[5] Chicalé, R., Propriedades Genéricas de Sistemas Hamiltonianos, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2013.

[6] Geiges, H., An Introduction to Contact Topology, Cambridge University Press, New York, 2008.

[7] Geometria Simplética. (n.d.). En IMPA. Recuperado el 10 de octubre de 2018, de https://impa.br/pesquisa/geometria-simpletica/.

[8] Hall, B., Lie Groups, Lie Algebras, and Representations, Springer, New York, 2004.

[9] Hryniewicz U. e Salomão P., Introdução à Geometria Finsler, 2013.

[10] Jean Gaston Darboux. (n.d.). En Wikipedia. Recuperado el 10 de octubre de 2018, de https://en.wikipedia.org/wiki/Jean_Gaston_Darboux.

[11] Lages, E., álgebra Linear, Coleção Matemática Universitária, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2014.

[12] Lee, J., Introduction to Smooth Manifolds, Springer, New York, 2003.

[13] Lee, J., Riemannian Manifolds, Springer, New York, 1997.

[14] López, C., O Truque de Moser em Geometria Simplética, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

[15] McDuff D. e Salamon D., Introduction to Symplectic Topology, Oxford University Press, New York, 1998.

[16] Mclnerney A., First Steps in Differential Geometry, Springer, New York, 2013.

[17] Mecânica clássica. (n.d.). En Wikipedia. Recuperado el 10 de octubre de 2018, de https://pt.wikipedia.org/wiki/Mecânica_clássica.

[18] Mecânica hamiltoniana. (n.d.). En Wikipedia. Recuperado el 10 de octubre de 2018, de https://pt.wikipedia.org/wiki/Mecânica_hamiltoniana.

[19] Meinrenkem, E., Simplectic Geometry, Lecture Notes, University of Toronto, Ontario, 2000.

[20] Moser, J., On the volume elements on manifold, Trans. Amer. Math. Soc. 120, 1965, 286-294.

[21] Munkres, J., Topology, Prentice-Hall, New Jersey, 2000.

[22] Nasar S., Jurgen Moser, Who proved Celestial Theory, Dies at 71, The New York Times, U.S. 21 Dezembro 1999.

[23] Rabinowitz, P., Jürgen K. Moser Biographical Memoirs, National Academy of Sciences, 2015.

[24] Sotomayor, J., Equações Diferenciais Ordinárias, São Paulo, 2009.

[25] Spivak, M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume 1, Texas, 1999.

[26] Tu, L., An Introduction to Manifold, Springer, New York, 2010.

[27] Warner, F., Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer, Berlin, 1983.

[28] Zuñiga, F., A curvatura Gaussiana via ângulo de contato de superfícies imersas em S^3, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2015.